Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Matemáticas: Aplicaciones e Interpretación
Nivel Superior
Prueba 3

14 de noviembre de 2025

Zona A tarde | **Zona B** tarde | **Zona C** tarde

1 hora 15 minutos

Instrucciones para los alumnos

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Matemáticas: Aplicaciones e Interpretación NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[55 puntos]**.

8825 – 7343

Conteste **las dos** preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada pregunta. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención. Por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 26]

Esta pregunta plantea si es factible subirse a todas las atracciones de un parque temático y volver a la entrada en dos horas y media.

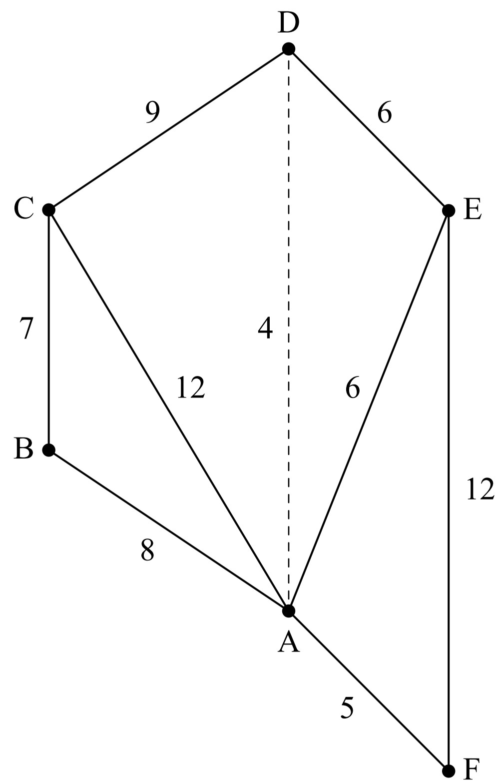
Martin va a ir a un parque temático. Entrará al parque a las 09.00 y tiene que salir del parque, a más tardar, a las 11.30. Utiliza la información que encuentra en Internet para calcular si le dará tiempo a subirse a todas las atracciones en esas dos horas y media.

Empieza por construir un grafo que muestra los caminos principales que hay entre una atracción y otra y el trayecto del teleférico que une la entrada/salida A y la atracción D.

En la siguiente figura se muestra este grafo y los nombres de las atracciones.

la figura no está dibujada a escala

A	Entrada/salida
B	Bala
C	Cañón
D	Inmersión profunda
E	Pulso de energía
F	Flash



(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 1: continuación)

Los pesos de las aristas del grafo representan el tiempo (en minutos) que se tarda en llegar caminando de una atracción a otra y el tiempo que dura el viaje en teleférico entre A y D.

Sea T el menor tiempo posible (en minutos) que se tarda en ir a todas las atracciones, empezando y acabando en A.

Martin se da cuenta de que el grafo contiene un ciclo hamiltoniano. Decide utilizar el peso del ciclo hamiltoniano como límite superior de T.

(a) Halle el peso de este ciclo hamiltoniano. [2]

Martin elabora la **Tabla 1** para mostrar el menor tiempo posible que se tarda en ir de una atracción a otra y entre la entrada y cada atracción.

Tabla 1

	A	B	C	D	E	F
A	0	8	12	4	6	5
B	8	0	7	a	14	13
C	12	7	0	9	15	b
D	4	a	9	0	6	9
E	6	14	15	6	0	11
F	5	13	b	9	11	0

(b) Escriba el valor de:

(i) a. [1]

(ii) b. [1]

(c) Utilice el algoritmo del vecino más próximo con la **Tabla 1** para hallar un límite superior para T. [3]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 1: continuación)

Martin decide utilizar el algoritmo del vértice borrado para hallar un límite inferior para T, borrando primero el vértice A. El menor tiempo posible para ir de una atracción a otra, tras haber borrado el vértice A, se muestra en la **Tabla 2**.

Tabla 2

	B	C	D	E	F
B	0	7	a	14	13
C	7	0	9	15	b
D	a	9	0	6	9
E	14	15	6	0	11
F	13	b	9	11	0

(d) (i) Utilice el algoritmo de Prim con la **Tabla 2** para hallar el peso del árbol generador mínimo del grafo cuyos vértices son B, C, D, E y F.
Empiece en el vértice B y escriba el orden en el que va eligiendo las aristas. [3]

(ii) A partir de lo anterior, halle un límite inferior para T. [2]

Martin halla más límites inferiores para T, borrando por turnos cada uno de los vértices. Los resultados se muestran en la siguiente tabla.

Vértice borrado	Límite inferior
B	39
C	39
D	36
E	36
F	39

Martin halla el intervalo más pequeño posible en el que se encuentra T, basándose en los valores que ha calculado de los límites superiores e inferiores. Escribe su respuesta en la forma $p \leq T \leq q$.

(e) Escriba el valor de:

(i) p. [1]

(ii) q. [1]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 1: continuación)

La atracción preferida de Martin es Pulso de energía (E), así que decide ir ahí en primer lugar. Tiene previsto empezar en A e ir a las atracciones E, D, C, B, F en ese orden, antes de volver a A. Para lo que queda de pregunta, suponga que Martin está siguiendo esta ruta.

(f) (i) Halle el menor tiempo posible que tardaría en completar esta ruta. [1]

(ii) Indique qué arista tendría que repetir. [1]

El viaje en cada atracción dura 2 minutos.

El tiempo de espera haciendo fila en la atracción B se puede representar mediante la variable aleatoria B_t lo mismo se puede hacer para el resto de atracciones.

Las siguientes distribuciones modelizan el tiempo de espera haciendo fila en cada atracción. Cada tiempo de espera es independiente del resto de tiempos de espera y de la hora del día.

$$B_t \sim \mathrm{N}(13\,,\,3),\ C_t \sim \mathrm{N}(21\,,\,15),\ D_t \sim \mathrm{N}(16\,,\,8),\ E_t \sim \mathrm{N}(10\,,\,6),\ F_t \sim \mathrm{N}(20\,,\,15)$$

(g) (i) Halle la distribución correspondiente al tiempo total de espera en las filas de las cinco atracciones. [3]

(ii) Halle la probabilidad de que Martin consiga subirse en las cinco atracciones y volver a la entrada en dos horas y media. [4]

Martin entra en el parque a las 09.00 y decide seguir la ruta prevista, pero subiéndose dos veces seguidas en el Pulso de energía.

(h) Halle la hora esperada a la que saldrá del parque. [3]

2. [Puntuación máxima: 29]

En esta pregunta, unos investigadores están tratando de hallar el modelo más preciso que pueden utilizar para modelizar una población de lobos.

Históricamente, en una zona dada, la población de lobos tenía un tamaño estable de 200 ejemplares. Tras algunos años de cambios en la zona, la población disminuyó a 40 lobos. En ese momento, la zona se declaró espacio protegido y la población empezó a crecer de nuevo.

Los investigadores de la zona quieren modelizar el tamaño de la población de lobos (x) en función de t, donde t es el tiempo (en años) transcurrido desde que la zona se declaró espacio protegido.

(a) Inicialmente, los investigadores se plantean utilizar el modelo logístico

$$x = \frac{L}{1 + C\mathrm{e}^{-kt}}\text{, donde } L,\, C,\, k \in \mathbb{R}^{+}.$$

Los investigadores deciden plantear $L = 200$.

(i) Indique la suposición que se hace al plantear $L = 200$. [1]

En el instante $t = 0$, la población de lobos es igual a 40.

(ii) Halle el valor de C. [2]

En el instante $t = 5$, se observa que la población de lobos ha aumentado a 70.

(iii) Halle el valor de k. [2]

(iv) Utilice su modelo para predecir el tamaño de la población de lobos en esa zona 10 años después de que se declarase espacio protegido. Dé la respuesta redondeando al número entero más cercano. [2]

(b) Hay un modelo alternativo para el crecimiento de una población llamado modelo de Gompertz. Cuando los investigadores lo aplican a la población de lobos, este modelo satisface la ecuación diferencial

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ax\ln\left(\frac{200}{x}\right),\ a \in \mathbb{R}^{+}.$$

(i) Escriba el valor de $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ para $x = 200$. [1]

(ii) Interprete, en contexto, su respuesta al apartado (b)(i). [1]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 2: continuación)

Considere la función $f(x) = \ln(\ln 200 - \ln x)$, donde $0 < x < 200$.

(iii) Muestre que $f'(x) = \dfrac{-1}{x \ln\left(\dfrac{200}{x}\right)}$. [2]

(iv) A partir de lo anterior, utilice la separación de variables para mostrar que la solución general de

$$\frac{dx}{dt} = ax \ln\left(\frac{200}{x}\right), \text{ donde } 0 < x < 200,$$

se puede escribir así:

$$\ln x = \ln 200 - Ae^{-at},$$

donde A es una constante positiva arbitraria. [5]

(v) Utilice el tamaño de la población de lobos en el instante $t = 0$ para hallar el valor de A. Dé la respuesta en la forma $A = \ln p$, donde $p \in \mathbb{Z}^+$. [2]

(vi) Utilice el tamaño de la población de lobos en el instante $t = 5$, dado en el apartado (a), para mostrar que $a = 0{,}0855$, redondeando a tres cifras significativas. [2]

(vii) Utilice el modelo de Gompertz para predecir el tamaño de la población de lobos en el instante $t = 10$. Dé la respuesta redondeando al número entero más cercano. [3]

Transcurridos 10 años, se mide la población de lobos y se obtiene un valor de 85.

(c) Comente las predicciones hechas por los dos modelos [1]

Haciendo un seguimiento individualizado de los lobos, los investigadores hallan que, cada año, aproximadamente el 3% de la población de lobos se marcha de la zona protegida.

Deciden adaptar el modelo de Gompertz para incluir este hecho. El nuevo modelo va a satisfacer la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = 0{,}0855x \ln\left(\frac{200}{x}\right) - 0{,}03x.$$

(d) (i) Utilice el método de Euler, con un paso de $0{,}5$ años y un valor inicial de $x_0 = 70$ cuando $t = 5$, para hallar una estimación del tamaño de la población de lobos cuando $t = 10$. Dé la respuesta redondeando al número entero más cercano. [4]

(ii) Comente la respuesta que ha obtenido. [1]