

© International Baccalaureate Organization 2025

All rights reserved. No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without the prior written permission from the IB. Additionally, the license tied with this product prohibits use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, whether fee-covered or not, is prohibited and is a criminal offense.

More information on how to request written permission in the form of a license can be obtained from <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organisation du Baccalauréat International 2025

Tous droits réservés. Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite préalable de l'IB. De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, moyennant paiement ou non, est interdite et constitue une infraction pénale.

Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour obtenir une autorisation écrite sous la forme d'une licence, rendez-vous à l'adresse <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organización del Bachillerato Internacional, 2025

Todos los derechos reservados. No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin la previa autorización por escrito del IB. Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales—, ya sea incluido en tasas o no, está prohibido y constituye un delito.

En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una autorización por escrito en forma de licencia: <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

Matemáticas: Aplicaciones e Interpretación

Nivel Superior

Prueba 2

11 de noviembre de 2025

Zona A mañana | Zona B mañana | Zona C mañana

2 horas

Instrucciones para los alumnos

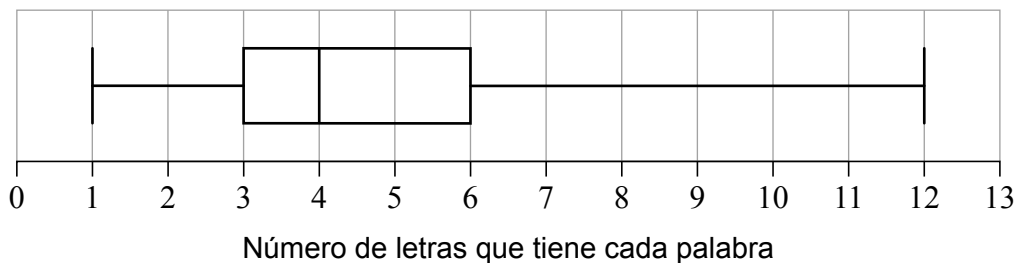
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Matemáticas: Aplicaciones e Interpretación NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[110 puntos]**.

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada pregunta. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención. Por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 15]

El Dr. Petrillo escribió un breve ensayo científico. El analizó la legibilidad del ensayo contando el número de letras que tiene cada palabra.

El Dr. Petrillo elabora un diagrama de caja y bigote referido a estos datos.



(a) Escriba:

- (i) La mediana.
- (ii) El tercer cuartil (C_3).
- (iii) El rango intercuartil (RIC).

[3]

El Dr. Petrillo quiere ahora modificar su diagrama para mostrar todos los valores atípicos que haya. Toma las palabras más largas de su conjunto de datos y utiliza la siguiente fórmula:

$$\text{valores atípicos} > (1,5 \times \text{RIC}) + C_3.$$

Las palabras que tengan al menos k letras se considerarán valores atípicos.

(b) Halle el valor de k .

[2]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 1: continuación)

El Dr. Petrillo sigue considerando los valores atípicos y no ve ningún motivo para excluirlos de su análisis.

En la siguiente tabla se resume la longitud (n) de cada palabra en el ensayo y su frecuencia correspondiente.

n	$1 \leq n \leq 2$	$3 \leq n \leq 4$	$5 \leq n \leq 6$	$7 \leq n \leq 8$	$9 \leq n \leq 10$	$11 \leq n \leq 12$	$n \geq 13$
Frecuencia	289	480	220	136	90	45	0

- (c) Utilice los valores centrales de los intervalos para calcular una estimación de la media del número de letras que tiene cada palabra. [3]

El Dr. Petrillo realiza una prueba χ^2 de determinación de la bondad del ajuste, a un nivel de significación del 1%, para contrastar la siguiente hipótesis nula:

H_0 : La frecuencia del número de letras que tiene cada palabra de su ensayo es coherente con el idioma inglés.

- (d) Escriba la hipótesis alternativa correspondiente a esta prueba. [1]

En la siguiente tabla se muestran las frecuencias observadas y las esperadas del número de letras que tienen las palabras de su ensayo.

n	$1 \leq n \leq 2$	$3 \leq n \leq 4$	$5 \leq n \leq 6$	$7 \leq n \leq 8$	$9 \leq n \leq 10$	$11 \leq n \leq 12$	$n \geq 13$
Frecuencia observada	289	480	220	136	90	45	0
Frecuencia esperada	252.0	491.4	239.4	151.2	88.2	31.8	6.0

- (e) (i) Escriba el número de grados de libertad.
 (ii) Halle el estadístico χ^2 correspondiente a esta prueba.
 (iii) Halle el valor del parámetro p correspondiente a esta prueba. [4]

El valor crítico de esta prueba, a un nivel de significación del 1%, es 16,812.

- (f) Indique si el Dr. Petrillo debe (o no) rechazar la hipótesis nula. Justifique su respuesta. [2]

Página en blanco

2. [Puntuación máxima: 16]

La altura de una planta (h en cm) depende del tiempo (t días) transcurrido desde que se plantó.

Durante los primeros 15 días, la razón de cambio de la altura de la planta se puede modelizar así:

$$\frac{dh}{dt} = 1,2 - 0,1t, \text{ donde } 0 \leq t \leq 15.$$

- (a) (i) Halle el valor de $\frac{dh}{dt}$ para $t = 3$.
- (ii) Interprete, en contexto, el significado de la respuesta que ha dado en el apartado (a)(i). [2]

- (b) Utilice $\frac{dh}{dt}$ para hallar el valor de t cuando la planta alcanza su altura máxima. [2]

Dos días después de plantarla, la altura de la planta es igual a 6,5 cm.

- (c) Halle una expresión que dé h en función de t , para $0 \leq t \leq 15$. [5]

- (d) A partir de lo anterior, halle la altura máxima de la planta. [2]

Hay una segunda planta que se plantó al mismo tiempo que la primera planta. Su altura (H en cm) se puede modelizar mediante la función $H = 2(1,2)^t$, donde $0 \leq t \leq 15$.

- (e) Escriba la altura inicial de la segunda planta. [1]

Cada día, la altura de la segunda planta aumenta un $p\%$.

- (f) Halle el valor de p . [2]

- (g) Halle el valor de t para el cual las dos plantas tienen la misma altura. [2]

3. [Puntuación máxima: 16]

Jenny diseña un puente colgante flexible que se extiende 10 metros sobre el arroyo Swinburne.

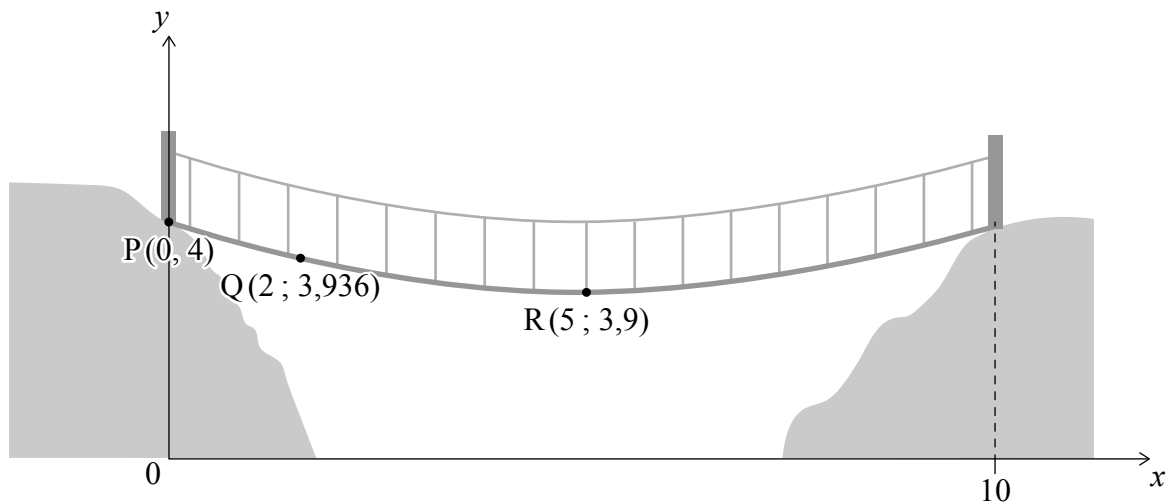
Jenny cree que cuando nadie está cruzando el puente, la altura (y) de la pasarela del puente sobre el nivel del arroyo se puede modelizar mediante

$$y = ax^2 + bx + c \text{ para } 0 \leq x \leq 10.$$

Utiliza un sistema de coordenadas cuyo origen está justo debajo de uno de los lados del puente, tal y como se muestra en la siguiente figura. Todas las distancias se miden en metros.

Según este modelo, los puntos $P(0, 4)$, $Q(2; 3,936)$ y $R(5; 3,9)$ estarán situados en la pasarela del puente. El punto R es el punto más bajo del puente.

la figura no está dibujada a escala



- (a) Escriba el valor de c , que es la intersección con el eje y del modelo. [1]

Utilizando el punto Q , Jenny halla la ecuación $-0,064 = 4a + 2b$.

- (b) (i) Halle otra ecuación en función de a y b .
 (ii) A partir de lo anterior, o de cualquier otro modo, halle el valor de a y el valor de b . [4]

- (c) Para el modelo de Jenny, halle:

- (i) $\frac{dy}{dx}$.
 (ii) La máxima pendiente de la pasarela del puente. [4]

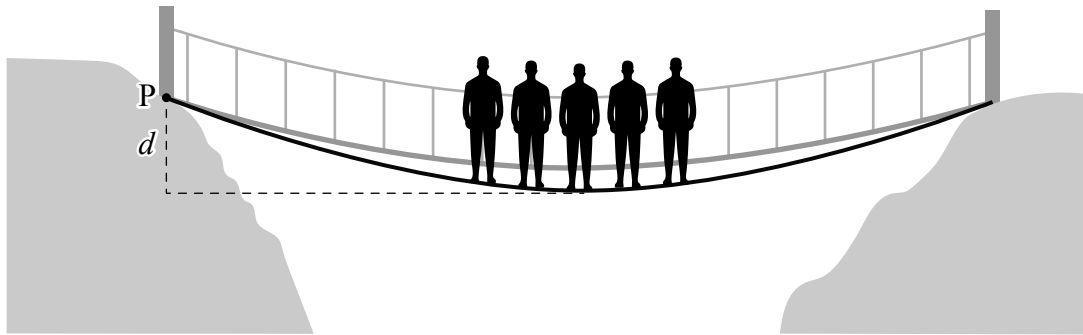
(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 3: continuación)

La deflexión (d) del puente es la distancia en vertical, respecto a P, a la que está el punto medio de la pasarela.

Una vez construido el puente, Jenny explora la relación que existe entre el número de personas que están pasando por el puente y su deflexión.

la figura no está dibujada a escala



Jenny ha recogido datos sobre el número de personas (n) que pasan por el puente y la deflexión (d metros) que provocan, tal y como se muestra en la siguiente tabla.

Número de personas (n)	1	2	3	4	5	6
Deflexión (d m)	0,215	0,233	0,250	0,269	0,297	0,305

(d) Para estos datos:

(i) Halle el valor del coeficiente de correlación momento-producto de Pearson (r).

(ii) Comente que tan fuerte es la correlación.

[3]

Para estos datos, la ecuación de la recta de regresión es $d = 0,01889n + 0,1954$ redondeando a cuatro cifras significativas.

(e) Interprete, en contexto, el significado del 0,01889 de la ecuación de la recta de regresión.

[1]

(f) Determine si es el **modelo** de Jenny de la altura de la pasarela, o es la ecuación de la recta de regresión, lo que da una menor estimación de la deflexión. Justifique su respuesta.

[3]

4. [Puntuación máxima: 14]

A Peter le gusta mucho hacer ejercicio y camina un máximo de 12 horas al día. La distancia (d kilómetros) que camina un día dado se puede modelizar mediante

$$d = 3\ln(5t + 1), \text{ para } 0 \leq t \leq 12$$

donde t es el tiempo (en horas) que está caminando ese día.

- (a) Halle el tiempo que tarda Peter en caminar 6 km un día dado. [2]

Peter, para motivarse, utiliza una aplicación móvil de deporte y va obteniendo puntos por cada día que camina. El número de puntos (p) que obtiene viene dado por

$$p = 20(1 - e^{-0.1d}), \text{ para } p \in \mathbb{R}.$$

- (b) Halle el número de puntos que obtiene Peter por caminar 6 km. [1]

- (c) Halle una expresión que dé p en función de t ; exprese la respuesta de la forma

$$p = 20 \left(1 - \frac{1}{(5t+1)^n} \right),$$

donde n es un número que hay que determinar. [4]

- (d) A partir de lo anterior, o de cualquier otro modo, halle el número de puntos que obtiene Peter por caminar durante 2,5 horas. [1]

- (e) Halle el número máximo de puntos que puede obtener Peter en un solo día. [2]

La aplicación de deporte empieza a conceder puntos de bonificación (b) por la distancia total recorrida en una semana (D), según la fórmula

$$b = 50 \left(1 - \frac{1}{D+1} \right).$$

Peter decide que caminará el mismo periodo de tiempo (T horas) cada día.

Quiere obtener, en total, 120 puntos en una semana (7 días).

- (f) Halle el valor de T . [4]

5. [Puntuación máxima: 17]

Una empresa vende aperitivos picantes. A lo largo de un largo período de tiempo, la empresa observa que el 60% de las personas que degustan los aperitivos luego los compran. La empresa quiere probar una nueva receta para ver si aumenta el porcentaje de personas que degustan estos nuevos aperitivos y luego los compran.

La empresa hace una encuesta con los 80 primeros clientes de un supermercado local que acceden a degustar los nuevos aperitivos.

(a) Indique el nombre del método de muestreo utilizado. [1]

De esas 80 personas que degustan los nuevos aperitivos, 54 los compran. La empresa realiza un contraste de hipótesis para determinar si la receta nueva representa (o no) una mejora.

Supone que las respuestas de esas 80 personas son independientes unas de otras. La hipótesis nula es

$$H_0: p = 0,6,$$

donde p es la proporción de personas que compran los nuevos aperitivos después de haberlos degustado.

(b) (i) Escriba la hipótesis alternativa (H_1).
(ii) Realice una prueba (contraste) adecuada, a un nivel de significación del 5%, e indique la conclusión a la que llega en el contexto de la pregunta. [6]

(c) (i) Halle la región crítica correspondiente a este contraste.
(ii) Sabiendo que $p = 0,65$, halle la probabilidad de que la empresa cometa un error de tipo II. [4]

Durante la encuesta, la empresa también anotó la edad de cada persona participante. Quieren averiguar si la edad de la persona es independiente de su decisión de comprar (o no) estos aperitivos. Los datos correspondientes a esas 80 personas se muestran en la siguiente tabla.

Edad (x)	Los compra	No los compra
$x < 20$	22	8
$20 \leq x < 30$	18	5
$30 \leq x < 40$	6	8
$40 \leq x$	8	5

(d) Realice una prueba (contraste) adecuada, a un nivel de significación del 5%, para determinar si la edad de una persona es independiente de si dicha persona comprará (o no) estos aperitivos. [6]

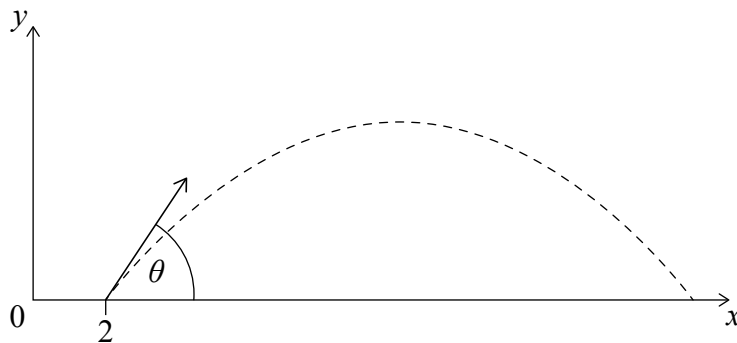
Página en blanco

6. [Puntuación máxima: 14]

En un campo de deporte al aire libre para niños, se lanza una pelota desde el suelo, con una velocidad inicial de 12 m s^{-1} y un ángulo de lanzamiento (respecto al suelo horizontal) igual a θ , donde $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

La posición de la pelota, t segundos después de haberse lanzado, viene dada por $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, donde x es el desplazamiento horizontal respecto a un origen e y es el desplazamiento vertical respecto al suelo. Las distancias se miden en metros.

La posición inicial de la pelota es $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y su trayectoria se muestra en la figura.



La pelota se puede modelizar como si fuera un proyectil, utilizando $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \cos \theta \\ 12 \sin \theta - 9,8t \end{pmatrix}$.

(a) Halle una expresión que dé x en función de θ y t . [3]

Se sabe que $y = (12 \sin \theta)t - 4,9t^2$.

(b) Muestre que, cuando la pelota toca el suelo, $t = \frac{120 \sin \theta}{49}$. [3]

Sea x_g el valor de x cuando la pelota toca el suelo.

(c) Halle una expresión que dé x_g en función de θ únicamente. [2]

(d) A partir de lo anterior, halle el valor de θ que maximiza el valor de x_g . [2]

El modelo se adapta para tener en cuenta un viento horizontal que sopla con una velocidad de 3 m s^{-1} .

Para esa misma pelota, el nuevo modelo es $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \cos \theta - 3 \\ 12 \sin \theta - 9,8t \end{pmatrix}$.

En este nuevo modelo, el tiempo que tarda la pelota en tocar el suelo sigue siendo $t = \frac{120 \sin \theta}{49}$.

(e) (i) Halle una expresión que dé x_g en función de θ únicamente.

(ii) A partir de lo anterior, halle el valor de θ que maximiza el valor de x_g . [4]

7. [Puntuación máxima: 18]

Los primeros números de la sucesión de Fibonacci son 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...

Para hallar el siguiente número de la sucesión, hay que sumar los dos números anteriores. Esto se puede escribir así: $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$, junto con $f_1 = 0$ y $f_2 = 1$.

Los pares de números consecutivos de la sucesión se pueden escribir en forma de matriz,

$\begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix}$, y se pueden usar para generar una nueva sucesión de matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \dots$$

(a) Escriba los dos términos siguientes de esta sucesión de matrices. [2]

(b) Muestre que $\begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{pmatrix}$. [2]

(c) Muestre que la ecuación característica de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ es $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$. [2]

Los valores propios de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ son λ_1 y λ_2 y un conjunto de vectores propios

correspondiente es $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(d) Utilizando el apartado (c), y sin hallar el valor de λ_1 , verifique que $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix}$ satisface la ecuación de un vector propio.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad [2]$$

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 7: continuación)

Se sabe que $\begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

La matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1}$ se puede escribir en la forma $\mathbf{P}\mathbf{D}^{n-1}\mathbf{P}^{-1}$, donde \mathbf{D} es una matriz diagonal.

(e) Escriba, en función de λ_1 y λ_2 :

(i) \mathbf{D} .

(ii) \mathbf{P} .

(iii) \mathbf{P}^{-1} .

[3]

(f) A partir de lo anterior, y multiplicando las matrices $\mathbf{P}\mathbf{D}^{n-1}\mathbf{P}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, muestre que

$$f_n = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left((\lambda_1)^{n-1} - (\lambda_2)^{n-1} \right). \quad [4]$$

(g) (i) Utilice el apartado (c) para hallar el valor exacto de λ_1 y λ_2 .

(ii) A partir de lo anterior, escriba una expresión que dé f_n en función de n .

[3]