Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

© International Baccalaureate Organization 2025

All rights reserved. No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without the prior written permission from the IB. Additionally, the license tied with this product prohibits use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, whether fee-covered or not, is prohibited and is a criminal offense.

More information on how to request written permission in the form of a license can be obtained from https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/.

© Organisation du Baccalauréat International 2025

Tous droits réservés. Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite préalable de l'IB. De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, moyennant paiement ou non, est interdite et constitue une infraction pénale.

Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour obtenir une autorisation écrite sous la forme d'une licence, rendez-vous à l'adresse https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/.

© Organización del Bachillerato Internacional, 2025

Todos los derechos reservados. No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin la previa autorización por escrito del IB. Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales—, ya sea incluido en tasas o no, está prohibido y constituye un delito.

En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una autorización por escrito en forma de licencia: https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/.

Matemáticas: Análisis y Enfoques
Nivel Superior
Prueba 3

14 de noviembre de 2025

Zona A tarde | **Zona B** tarde | **Zona C** tarde

1 hora 15 minutos

Instrucciones para los alumnos

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Matemáticas: Análisis y Enfoques NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[55 puntos]**.

8825 – 7158
© International Baccalaureate Organization 2025

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 26]

En la siguiente pregunta se exploran las características de funciones trigonométricas compuestas, como $\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$ **,** $\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))$.

Suponga que $S_n(x)$ denota la función $\operatorname{sen} x$ compuesta con ella misma $n-1$ veces, y definida para $n \geq 1$, $n \in \mathbb{Z}^+$, donde $0 \leq x \leq 2\pi$.

Por ejemplo, $S_1(x) = \operatorname{sen} x$ y $S_2(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$, donde $0 \leq x \leq 2\pi$.

(a) En los mismos ejes de coordenadas, dibuje aproximadamente y rotule los gráficos de $y = S_1(x)$ e $y = S_2(x)$. En ese mismo bosquejo (dibujo aproximado), muestre los valores de las intersecciones con los ejes. [4]

(b) Determine el valor máximo de:

(i) $S_1(x)$ [1]

(ii) $S_2(x)$ [1]

(iii) $S_3(x)$ [1]

(c) Halle el valor más pequeño de n para el cual el valor máximo de $S_n(x)$ es menor que $0{,}6$. [3]

Considere el gráfico de $y = S_2(x)$.

(d) Considerando la ecuación $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$, muestre que hay exactamente dos puntos de pendiente cero: uno en $x = \frac{\pi}{2}$ y otro en $x = \frac{3\pi}{2}$. [6]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 1: continuación)

La derivada $S'_n\left(x\right)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(S_n\left(x\right)\right)$ se puede expresar como el producto de funciones coseno, de la siguiente manera:

$$S'_n(x)=\cos\left(S_{n-1}(x)\right)\cos\left(S_{n-2}(x)\right)\ \ldots\ \cos\left(S_1(x)\right)\cos x\ .$$

(e) A partir de lo anterior, muestre que $S'_3(x)=\cos\left(\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}x\right)\right)\cos\left(\operatorname{sen}x\right)\cos x$. [1]

(f) Utilice la inducción matemática para probar que para todo $n\in\mathbb{Z}^+$ se cumple que

$S'_n(x)=\cos\left(S_{n-1}(x)\right)\cos\left(S_{n-2}(x)\right)\ \ldots\ \cos\left(S_1(x)\right)\cos x.$ [6]

(g) Utilice la regla de l'Hôpital para mostrar que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{S_n\left(x\right)}{x}=1$, para $n\in\mathbb{Z}^+$. [3]

2. [Puntuación máxima: 29]

En la siguiente pregunta se utilizan series de Maclaurin para investigar posibles aproximaciones de constantes matemáticas y la precisión de dichas aproximaciones.

(a) Dado $|x| < 1$, halle la suma de los infinitos términos de la serie geométrica $1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$. [2]

(b) A partir de lo anterior, utilice la integración para mostrar que la serie de Maclaurin de $\arctan x$ se puede expresar así: $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$. [3]

(c) Utilizando $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ y los **tres** primeros términos (distintos de cero) de la serie de Maclaurin de $\arctan x$, halle una aproximación de π con tres cifras decimales. [3]

La serie de Maclaurin de $\arctan x$ es un ejemplo de serie alternada; es decir, una serie donde se van alternando términos consecutivos positivos y negativos. Considere el siguiente teorema.

Teorema: Para series alternadas cuyos términos son de magnitud decreciente, el error cometido al utilizar un número finito de términos es menor o igual que el valor absoluto del siguiente término de la progresión.

Utilizando el teorema, el error máximo que se comete al utilizar los tres primeros términos (distintos de cero) como una aproximación de $\arctan x$ viene dado por $\left|-\frac{x^7}{7}\right|$. En otras palabras, $\left|\arctan x - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right)\right| \le \left|-\frac{x^7}{7}\right|$.

(d) Determine cuántos términos (distintos de cero) de la serie habría que utilizar para que el error cometido al aproximar $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ sea menor que $0{,}0001$. [3]

(e) Utilizando la integración por partes, muestre que $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \arctan x \, dx = \frac{\pi}{6\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$. [4]

(f) Determine el valor de $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}\right) dx$; dé la respuesta redondeando a seis cifras decimales. [2]

(g) Utilice los resultados de los apartados (e) y (f) para hallar una aproximación de π . Dé la respuesta redondeando a cuatro cifras decimales. [2]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 2: continuación)

$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \right) \mathrm{d}x$ se puede considerar que es la suma de términos alternados.

Por consiguiente,

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \right) \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} x \,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left(-\frac{x^3}{3} \right) \mathrm{d}x + \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left(\frac{x^5}{5} \right) \mathrm{d}x + \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left(-\frac{x^7}{7} \right) \mathrm{d}x + \ldots .$$

$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \arctan x \,\mathrm{d}x$ se puede aproximar utilizando la suma de las cuatro primeras integrales definidas.

(h) Verifique que, en este caso, se cumple el teorema utilizado en el apartado (d). [5]

Suponga que el máximo error cometido al aproximar $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \arctan x \,\mathrm{d}x$ tiene que ser, como mucho, de 1×10^{-6}.

(i) Determine el número mínimo de términos (distintos de cero) de la serie de Maclaurin de $\arctan x$ que habría que utilizar. [5]