

© International Baccalaureate Organization 2025

All rights reserved. No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without the prior written permission from the IB. Additionally, the license tied with this product prohibits use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, whether fee-covered or not, is prohibited and is a criminal offense.

More information on how to request written permission in the form of a license can be obtained from <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organisation du Baccalauréat International 2025

Tous droits réservés. Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite préalable de l'IB. De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, moyennant paiement ou non, est interdite et constitue une infraction pénale.

Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour obtenir une autorisation écrite sous la forme d'une licence, rendez-vous à l'adresse <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organización del Bachillerato Internacional, 2025

Todos los derechos reservados. No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin la previa autorización por escrito del IB. Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales—, ya sea incluido en tasas o no, está prohibido y constituye un delito.

En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una autorización por escrito en forma de licencia: <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

Matemáticas: Análisis y Enfoques

Nivel Superior

Prueba 1

10 de noviembre de 2025

Zona A tarde | Zona B tarde | Zona C tarde

Número de convocatoria del alumno

2 horas

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Instrucciones para los alumnos

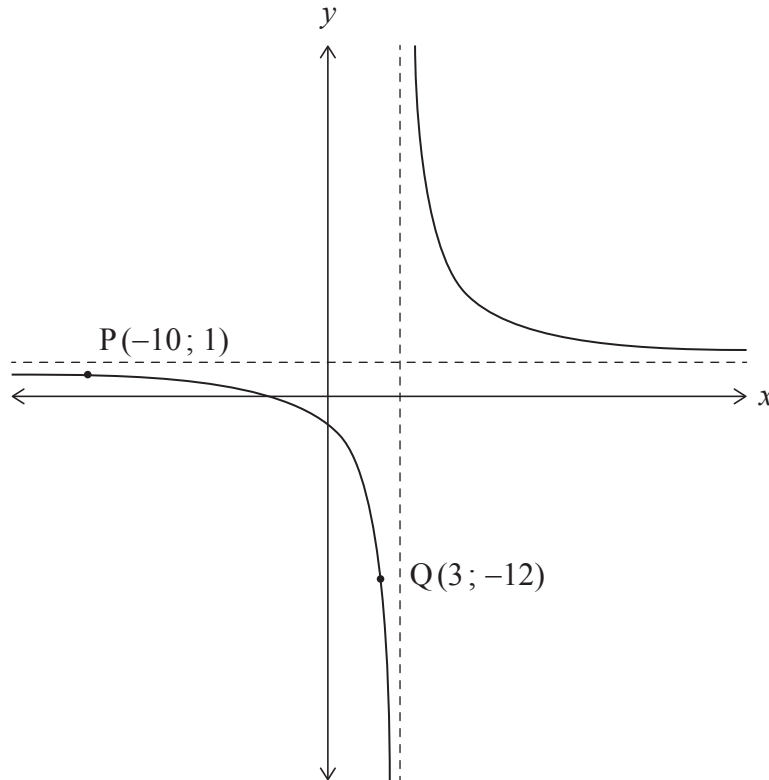
- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba no se permite el uso de ninguna calculadora.
- Sección A: conteste todas las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto.
- Sección B: conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Escriba su número de convocatoria en la parte delantera del cuadernillo de respuestas, y adjúntelo a este cuestionario de examen y a su portada utilizando los cordeles provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Matemáticas: Análisis y Enfoques NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[110 puntos]**.



3. [Puntuación máxima: 8]

En la siguiente figura se muestra el gráfico de $y = \frac{Ax+B}{x-4}$, donde $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 4$ y $A, B \in \mathbb{Z}$.

El gráfico pasa por los puntos $P(-10; 1)$ y $Q(3; -12)$.



(a) Determine el valor de A y el valor de B . [3]

(b) Describa una secuencia de transformaciones con las que el gráfico de $y = \frac{1}{x}$ coincidiría exactamente con el gráfico de $y = \frac{Ax+B}{x-4}$. [5]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

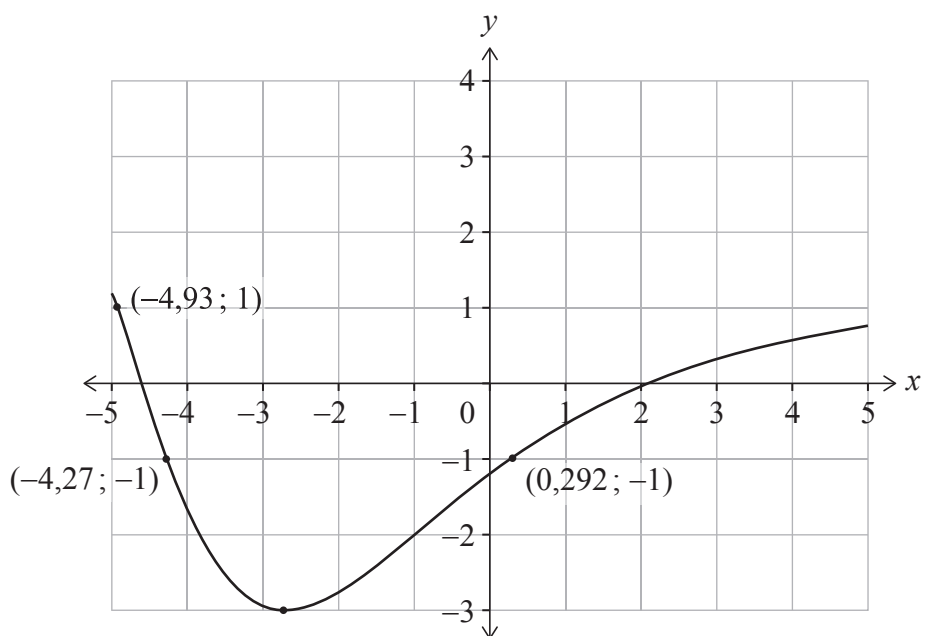
.....



5. [Puntuación máxima: 8]

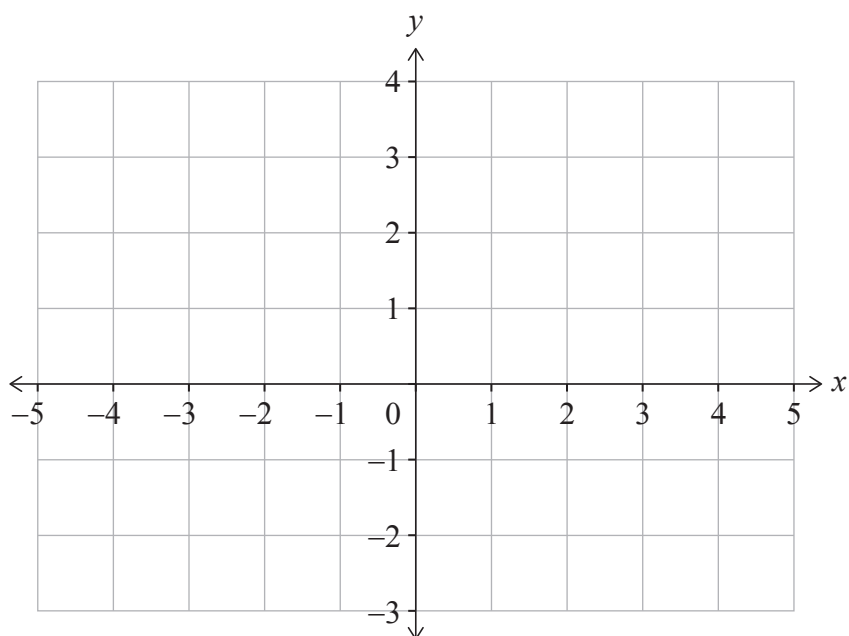
El gráfico de $y = f(x)$, para $-5 \leq x \leq 5$, se muestra en la siguiente figura.

La curva pasa por los puntos $(-4,93; 1)$, $(-4,27; -1)$ y $(0,292; -1)$.



(a) En los siguientes ejes de coordenadas:

(i) Dibuje aproximadamente el gráfico de $y = f(|x|)$ y muestre las intersecciones aproximadas con los ejes.



(Esta pregunta continúa en la página siguiente)



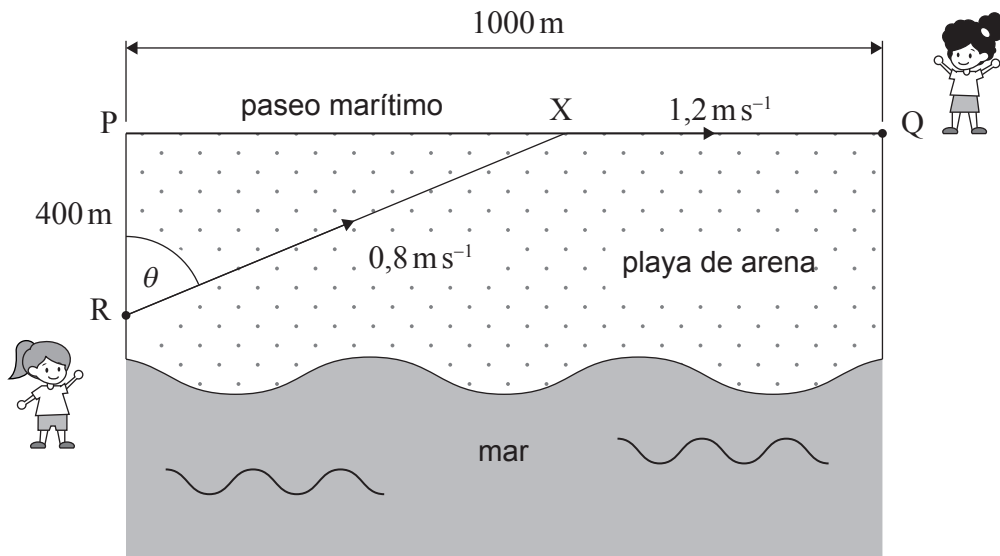
8. [Puntuación máxima: 9]

Astrid y Bronwyn están de vacaciones en la playa de Blackpool.

Astrid está de pie en la playa, en el punto R, y ve a Bronwyn que está de pie en el paseo marítimo, en el punto Q. $PR = 400$ m, $PQ = 1000$ m y $\widehat{PRX} = \theta$, donde $0 < \tan \theta \leq \frac{5}{2}$.

Astrid echa a andar en línea recta desde R con una velocidad de $0,8 \text{ m s}^{-1}$ hasta que llega al punto X del paseo marítimo. A continuación, echa a correr por el paseo marítimo a una velocidad de $1,2 \text{ m s}^{-1}$.

Toda esta información se representa en la siguiente figura.



Se sabe que $RX = 400 \sec \theta$ y $XQ = 1000 - 400 \tan \theta$.

Sea T el tiempo (en segundos) que tarda Astrid en llegar hasta donde está Bronwyn.

(a) Muestre que $T = 500 \sec \theta + \frac{2500 - 1000 \tan \theta}{3}$. [2]

(b) Halle $\frac{dT}{d\theta}$. [3]

Astrid elige el ángulo θ de su paseo por la playa hacia el punto X de modo que llegue donde está Bronwyn en el menor tiempo posible. Puede suponer que T tiene exactamente un mínimo.

(c) Muestre que, en este caso, $PX = 160\sqrt{5}$ m. [4]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)



No escriba soluciones en esta página.

Sección B

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta.

9. [Puntuación máxima: 15]

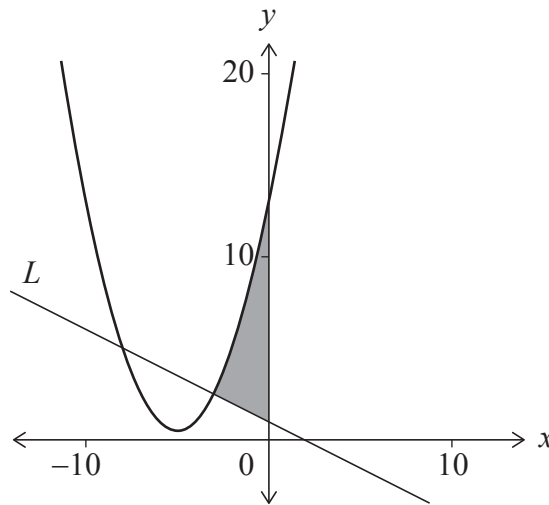
Considere la función que viene dada por $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + kx + 13$, donde $x \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{Z}^+$.

(a) Sabiendo que la ecuación $f(x) = 0$ no tiene raíces reales, muestre que el mayor valor posible de k es 5. [2]

Para lo que queda de esta pregunta, considere el caso particular $k = 5$.

- (b) (i) Escriba la ecuación del eje de simetría del gráfico de f .
 (ii) A partir de lo anterior (o de cualquier otro modo alternativo), determine las coordenadas del mínimo del gráfico de f . [3]

En la siguiente figura se muestra el gráfico de f y de la recta L , que es normal a la curva en $x = -3$. La región sombreada de la figura está delimitada por la curva, la recta L y el eje y .



(c) Muestre que la ecuación de L es $y = -\frac{1}{2}x + 1$. [5]

(d) A partir de lo anterior, halle el área de la región sombreada. [5]



No escriba soluciones en esta página.

10. [Puntuación máxima: 19]

El punto $P(-1 ; 1 ; -13)$ pertenece a la recta L_1 . La recta L_1 tiene por vector director $\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) Escriba una ecuación vectorial para L_1 en la forma $r = a + \lambda b$. [1]

(b) Halle la ecuación vectorial de la recta L_2 en la forma $s = c + \mu d$, sabiendo que L_2 pasa por los puntos $A(2 ; -4 ; 2)$ y $B(7 ; -6 ; 1)$. [2]

(c) Muestre que L_1 y L_2 son rectas alabeadas. [5]

El punto N pertenece a L_2 .

(d) Halle $\vec{PN} \cdot \vec{AB}$ en función de μ . [4]

(e) Sabiendo que N es el punto de L_2 que más cerca está de P , halle las coordenadas de N . [3]

(f) El punto O denota el origen $(0 ; 0 ; 0)$.
Halle la ecuación del plano que contiene los puntos O , P y N . Dé la respuesta en la forma $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$, donde $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z}$. [4]



No escriba soluciones en esta página.

11. [Puntuación máxima: 20]

(a) Sea $w = 1 + i\sqrt{3}$.

(i) Exprese w en la forma $w = re^{i\alpha}$, donde $r > 0$ y $-\pi < \alpha \leq \pi$.

(ii) Muestre que $(1 + i\sqrt{3})^8 + (1 - i\sqrt{3})^8 = -256$. [6]

Se sabe que $(1 + i \tan \theta)^n \equiv \frac{\cos n\theta + i \sin n\theta}{\cos^n \theta}$, para $\cos \theta \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}^+$.

(b) Muestre que $(1 + i \tan \theta)^4 + (1 - i \tan \theta)^4 \equiv \frac{2 \cos 4\theta}{\cos^4 \theta}$. [3]

(c) A partir de lo anterior, determine las cuatro raíces de la ecuación $(1 + z)^4 + (1 - z)^4 = 0$.
Dé las respuestas en la forma $z = i \tan\left(\frac{k\pi}{8}\right)$, donde $k \in \mathbb{Z}^+$. [4]

(d) Partiendo del desarrollo de la potencia del binomio de $(1 + z)^4 + (1 - z)^4$,
muestre que $\tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$. [7]



No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.



16EP15

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.



16EP16