Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Matemáticas: Análisis y Enfoques
Nivel Superior
Prueba 1

10 de noviembre de 2025

Zona A tarde | **Zona B** tarde | **Zona C** tarde

Número de convocatoria del alumno

2 horas

Instrucciones para los alumnos

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba no se permite el uso de ninguna calculadora.
- Sección A: conteste todas las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto.
- Sección B: conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Escriba su número de convocatoria en la parte delantera del cuadernillo de respuestas, y adjúntelo a este cuestionario de examen y a su portada utilizando los cordeles provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Matemáticas: Análisis y Enfoques NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[110 puntos]**.

8825 – 7156

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

Sección A

Conteste **todas** las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.

1. [Puntuación máxima: 5]

El $7.^{\text{o}}$ término de una progresión aritmética es 6.

La suma del $6.^{\text{o}}$ término y el $12.^{\text{o}}$ término es igual a 24.

Halle el primer término y la diferencia común.

2. [Puntuación máxima: 6]

Sean A y B dos sucesos tales que $\mathrm{P}(A) = \frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B) = \frac{1}{3}$ y $\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{1}{4}$.

(a) Halle la probabilidad de que ocurran ambos sucesos, A y B. [2]

(b) Halle $\mathrm{P}(A \mid B')$. [4]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

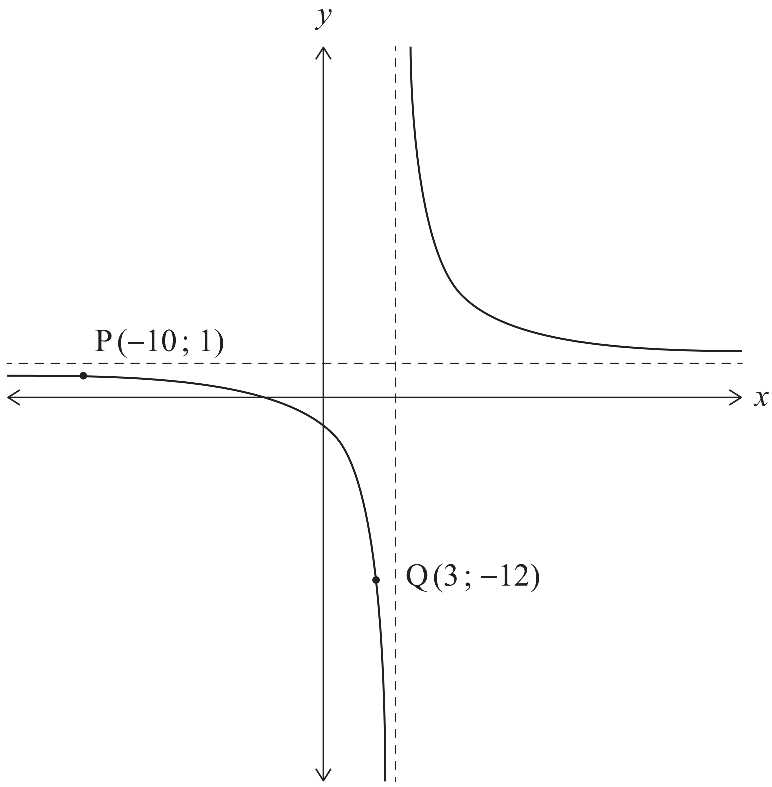
. . . .

. . . .

3. [Puntuación máxima: 8]

En la siguiente figura se muestra el gráfico de $y = \dfrac{Ax+B}{x-4}$, donde $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 4$ y A, $B \in \mathbb{Z}$.

El gráfico pasa por los puntos $\mathrm{P}(-10\,;\,1)$ y $\mathrm{Q}(3\,;\,-12)$.



(a) Determine el valor de A y el valor de B. [3]

(b) Describa una secuencia de transformaciones con las que el gráfico de $y = \dfrac{1}{x}$ coincidiría exactamente con el gráfico de $y = \dfrac{Ax+B}{x-4}$. [5]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

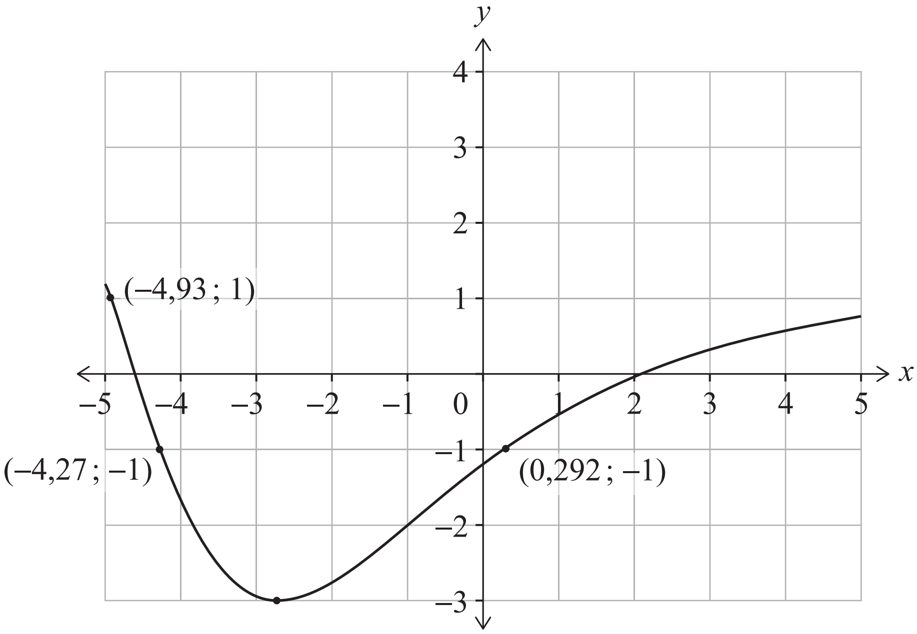
4. [Puntuación máxima: 5]

Resuelva la ecuación $3\log_8 10x - \log_4 x = 1$, para $x > 0$.

5. [Puntuación máxima: 8]

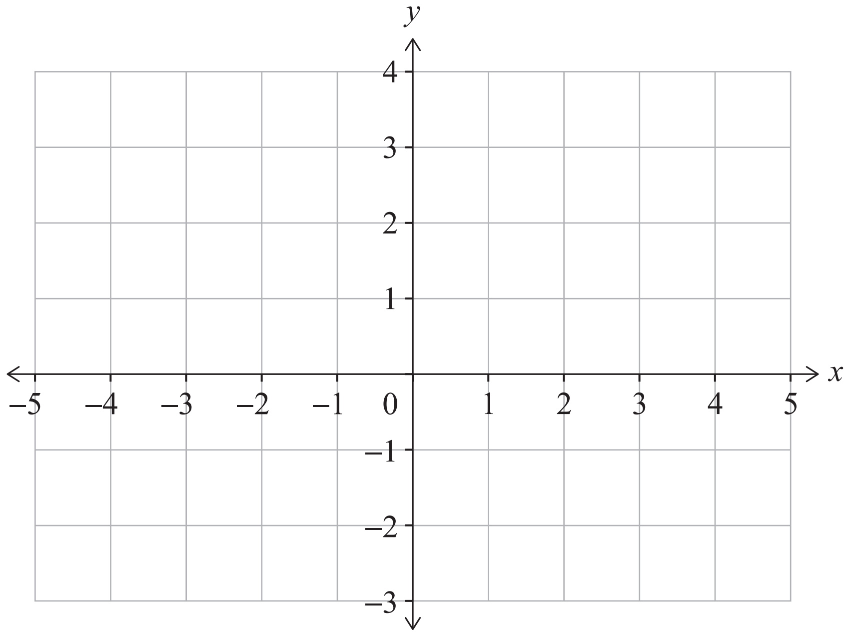
El gráfico de $y = f(x)$, para $-5 \le x \le 5$, se muestra en la siguiente figura.

La curva pasa por los puntos $(-4{,}93\ ;\ 1)$, $(-4{,}27\ ;\ -1)$ y $(0{,}292\ ;\ -1)$.



(a) En los siguientes ejes de coordenadas:

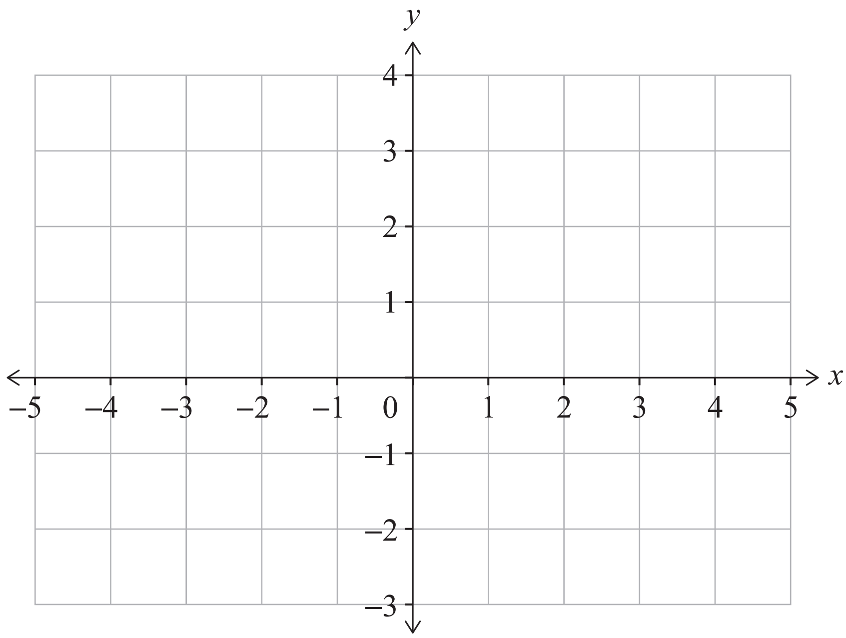
(i) Dibuje aproximadamente el gráfico de $y = f(|x|)$ y muestre las intersecciones aproximadas con los ejes.



(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 5: continuación)

(ii) Dibuje aproximadamente el gráfico de $y = | f(x) |$ y muestre las intersecciones aproximadas con los ejes. [4]



(b) Resuelva la inecuación $| f(x) | \geq (f(x))^2$. [4]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

6. [Puntuación máxima: 7]

En esta pregunta puede suponer que se cumple lo siguiente:

$\int x \operatorname{cosec}^2 x \, \mathrm{d}x = \ln|\operatorname{sen} x| - x \operatorname{cotan} x + c$.

Considere la ecuación diferencial $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 3y = \frac{\operatorname{cosec}^2 x}{x}$, para $0 < x < \pi$.

Sabiendo que $y = \frac{8}{\pi^2}$ para $x = \frac{\pi}{2}$, halle la solución particular de esta ecuación diferencial.

Exprese la respuesta en la forma $y = f(x)$.

7. [Puntuación máxima: 8]

La variable aleatoria discreta X tiene la siguiente distribución de probabilidad:

x	1	2	3
$\mathrm{P}(X=x)$	$0{,}6-2a$	$3a$	$0{,}4-a$

(a) Halle el intervalo de posibles valores de a. [2]

(b) Para el caso en el que $a = 0{,}2$, determine $\mathrm{Var}(2-X)$. [6]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

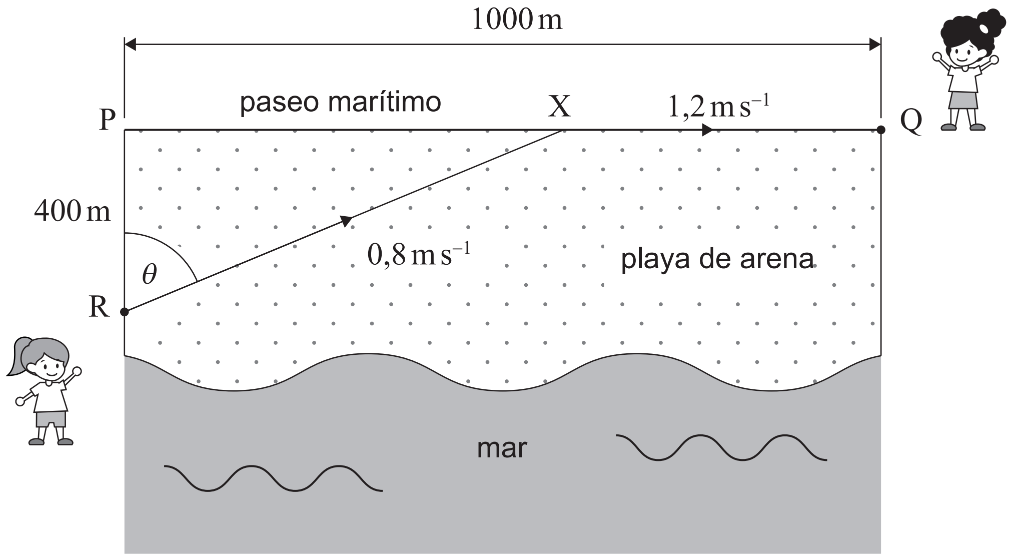
8. [Puntuación máxima: 9]

Astrid y Bronwyn están de vacaciones en la playa de Blackpool.

Astrid está de pie en la playa, en el punto R, y ve a Bronwyn que está de pie en el paseo marítimo, en el punto Q. $\mathrm{PR} = 400\ \mathrm{m}$, $\mathrm{PQ} = 1000\ \mathrm{m}$ y $\mathrm{P\hat{R}X} = \theta$, donde $0 < \tan\theta \le \frac{5}{2}$.

Astrid echa a andar en línea recta desde R con una velocidad de $0{,}8\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ hasta que llega al punto X del paseo marítimo. A continuación, echa a correr por el paseo marítimo a una velocidad de $1{,}2\ \mathrm{m\,s^{-1}}$.

Toda esta información se representa en la siguiente figura.



Se sabe que $\mathrm{RX} = 400\sec\theta$ y $\mathrm{XQ} = 1000 - 400\tan\theta$.

Sea T el tiempo (en segundos) que tarda Astrid en llegar hasta donde está Bronwyn.

(a) Muestre que $T = 500\sec\theta + \dfrac{2500 - 1000\tan\theta}{3}$. [2]

(b) Halle $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\theta}$. [3]

Astrid elige el ángulo θ de su paseo por la playa hacia el punto X de modo que llegue donde está Bronwyn en el menor tiempo posible. Puede suponer que T tiene exactamente un mínimo.

(c) Muestre que, en este caso, $\mathrm{PX} = 160\sqrt{5}\ \mathrm{m}$. [4]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 8: continuación)

No escriba soluciones en esta página.

Sección B

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta.

9. [Puntuación máxima: 15]

Considere la función que viene dada por $f\left(x\right)=\frac{1}{2}x^2+kx+13$, donde $x\in\mathbb{R}$ y $k\in\mathbb{Z}^+$.

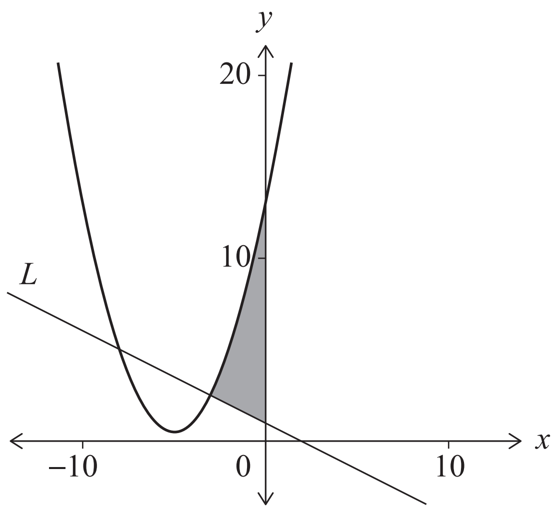
(a) Sabiendo que la ecuación $f(x)=0$ no tiene raíces reales, muestre que el mayor valor posible de k es 5. [2]

Para lo que queda de esta pregunta, considere el caso particular $k=5$.

(b) (i) Escriba la ecuación del eje de simetría del gráfico de f.

(ii) A partir de lo anterior (o de cualquier otro modo alternativo), determine las coordenadas del mínimo del gráfico de f. [3]

En la siguiente figura se muestra el gráfico de f y de la recta L, que es normal a la curva en $x=-3$. La región sombreada de la figura está delimitada por la curva, la recta L y el eje y.



(c) Muestre que la ecuación de L es $y=-\frac{1}{2}x+1$. [5]

(d) A partir de lo anterior, halle el área de la región sombreada. [5]

No escriba soluciones en esta página.

10. [Puntuación máxima: 19]

El punto $\mathrm{P}(-1\,;\,1\,;\,-13)$ pertenece a la recta L_1. La recta L_1 tiene por vector director $\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) Escriba una ecuación vectorial para L_1 en la forma $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} + \lambda \boldsymbol{b}$. [1]

(b) Halle la ecuación vectorial de la recta L_2 en la forma $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{c} + \mu \boldsymbol{d}$, sabiendo que L_2 pasa por los puntos $\mathrm{A}(2\,;\,-4\,;\,2)$ y $\mathrm{B}(7\,;\,-6\,;\,1)$. [2]

(c) Muestre que L_1 y L_2 son rectas alabeadas. [5]

El punto N pertenece a L_2.

(d) Halle $\overrightarrow{\mathrm{PN}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ en función de μ. [4]

(e) Sabiendo que N es el punto de L_2 que más cerca está de P, halle las coordenadas de N. [3]

(f) El punto O denota el origen $(0\,;\,0\,;\,0)$.
Halle la ecuación del plano que contiene los puntos O, P y N. Dé la respuesta en la forma $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$, donde $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z}$. [4]

No escriba soluciones en esta página.

11. [Puntuación máxima: 20]

(a) Sea $w = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.

(i) Exprese w en la forma $w = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$, donde $r > 0$ y $-\pi < \alpha \le \pi$.

(ii) Muestre que $\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^8 + \left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^8 = -256$. [6]

Se sabe que $\left(1+\mathrm{i}\tan\theta\right)^n \equiv \dfrac{\cos n\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\, n\theta}{\cos^n\theta}$, para $\cos\theta \ne 0$, $n \in \mathbb{Z}^+$.

(b) Muestre que $\left(1+\mathrm{i}\tan\theta\right)^4 + \left(1-\mathrm{i}\tan\theta\right)^4 \equiv \dfrac{2\cos 4\theta}{\cos^4\theta}$. [3]

(c) A partir de lo anterior, determine las cuatro raíces de la ecuación $(1+z)^4 + (1-z)^4 = 0$. Dé las respuestas en la forma $z = \mathrm{i}\tan\left(\dfrac{k\pi}{8}\right)$, donde $k \in \mathbb{Z}^+$. [4]

(d) Partiendo del desarrollo de la potencia del binomio de $(1+z)^4 + (1-z)^4$, muestre que $\tan\dfrac{\pi}{8} = \sqrt{3-2\sqrt{2}}$. [7]

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en esta página no serán corregidas.