

© International Baccalaureate Organization 2025

All rights reserved. No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without the prior written permission from the IB. Additionally, the license tied with this product prohibits use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, whether fee-covered or not, is prohibited and is a criminal offense.

More information on how to request written permission in the form of a license can be obtained from <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organisation du Baccalauréat International 2025

Tous droits réservés. Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite préalable de l'IB. De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, moyennant paiement ou non, est interdite et constitue une infraction pénale.

Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour obtenir une autorisation écrite sous la forme d'une licence, rendez-vous à l'adresse <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organización del Bachillerato Internacional, 2025

Todos los derechos reservados. No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin la previa autorización por escrito del IB. Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales—, ya sea incluido en tasas o no, está prohibido y constituye un delito.

En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una autorización por escrito en forma de licencia: <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

Matemáticas: Aplicaciones e Interpretación

Nivel Superior

Prueba 3

21 de mayo de 2025

Zona A tarde | **Zona B** tarde | **Zona C** tarde

1 hora 15 minutos

Instrucciones para los alumnos

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Matemáticas: Aplicaciones e Interpretación NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[55 puntos]**.

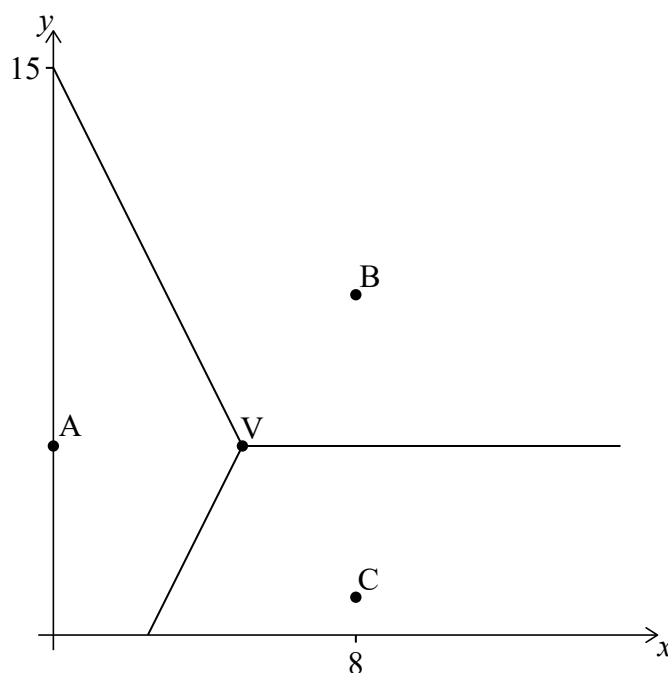
Conteste **las dos** preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada pregunta. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención. Por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 28]

En esta pregunta se analiza cómo la evaluación del Índice de Calidad del Aire (ICA) en un colegio depende del método elegido por la persona que realiza la evaluación.

La calidad del aire de un barrio se mide en tres estaciones de vigilancia. Las posiciones de estas estaciones en un sistema de coordenadas, donde las unidades representan kilómetros, son $A(0, 5)$, $B(8, 9)$ y $C(8, 1)$.

Se construye un diagrama de Voronoi con estas tres estaciones como sitios.



- (a) (i) Halle la ecuación de la mediatriz de $[BC]$. [2]
- (ii) Sabiendo que la ecuación de la mediatriz de $[AB]$ es $y = 15 - 2x$, halle las coordenadas del vértice V . [2]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 1: continuación)

La escuela S está situada en el barrio, en el punto cuyas coordenadas son (5, 6).

- (b) Indique cuál es la estación que está más cerca de la escuela. [1]

A la directora de la escuela le preocupa la calidad del aire en la zona. La calidad del aire se mide calculando el Índice de Calidad del Aire (ICA). En este distrito, un valor de menos de 50 se considera que indica una buena calidad del aire.

La directora se pone en contacto con la agencia local de medio ambiente y le pregunta cuál es el valor del ICA en su escuela. Le dan la media de las mediciones del ICA obtenidas en la estación de vigilancia más cercana a la escuela.

- (c) Escriba el tipo de interpolación que está utilizando la agencia de medio ambiente. [1]

La directora obtiene los valores medios del ICA de las tres estaciones.

Estación	Valor medio del ICA
A	132
B	49
C	125

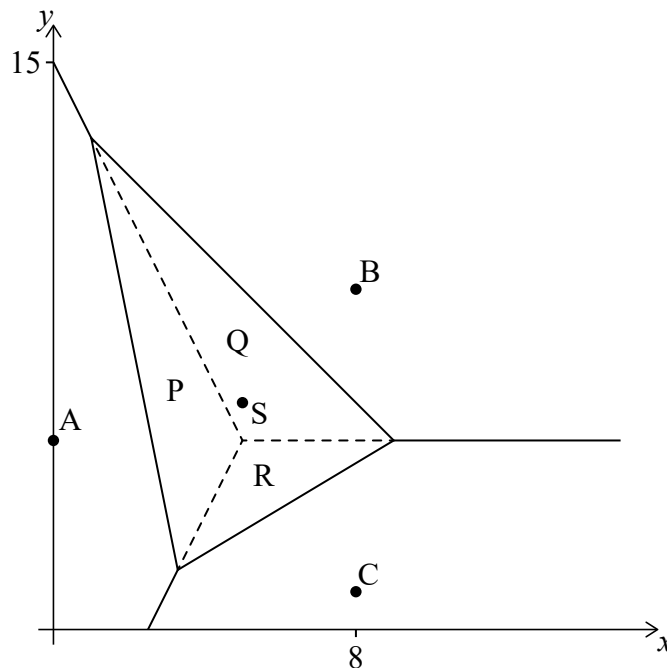
- (d) Explique por qué la directora podría no aceptar que la calidad del aire en los alrededores de la escuela se pueda calificar de “buena”. [1]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 1: continuación)

La directora decide obtener un valor esperado para el ICA de la escuela utilizando toda la información disponible. Para hacer esto, recurre a un método alternativo: el algoritmo de los vecinos naturales. Este algoritmo consta de dos etapas.

En la primera etapa se crea un diagrama de Voronoi nuevo en el que la escuela (S) sea un sitio adicional. Esto se muestra en la siguiente figura, donde las líneas discontinuas representan las aristas del diagrama anterior.



En la segunda etapa se calcula una estimación del valor del ICA en la escuela (W) utilizando la siguiente fórmula:

$$W = \frac{w_A a_A + w_B a_B + w_C a_C}{T}$$

En esta fórmula, a_A es el área perteneciente a la nueva celda que se ha tomado de la celda que rodeaba al sitio A —denominada región P en la figura— y w_A es el valor medio del ICA procedente del sitio A; es decir, el 132 que aparece en la tabla anterior de los valores medios del ICA. La explicación es similar para los sitios B y C. T es el área total de la celda nueva que hay alrededor de S.

- (e) (i) Halle el punto medio de $[SB]$. [2]
- (ii) Muestre que la ecuación de la mediatriz de $[SB]$ es $y = 14 - x$. [3]
- (iii) A partir de lo anterior, halle a_B (el área de la región Q de la figura). [5]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 1: continuación)

Las áreas de las regiones P y R son, respectivamente, $a_A = 13,7 \text{ km}^2$ y $a_C = 6,9 \text{ km}^2$.

- (f) Utilice el algoritmo de los vecinos naturales para mostrar que una estimación del valor esperado del ICA en la escuela (W) es 94,4. [2]

A la directora le sigue preocupando que este método esté subestimando el valor del ICA en la escuela, ya que la escuela está cerca de un cruce de carreteras con mucho tráfico. Por ello, decide hacer sus propias mediciones (x) a lo largo de un período de 60 días. Los resultados que obtiene se pueden resumir así:

$$\bar{x} = 97,8, s_{n-1} = 17,2, n = 60$$

La directora supone que los valores diarios del ICA en la escuela se pueden modelizar mediante una distribución normal y que cada valor es independiente del resto de valores.

- (g) Ponga a prueba, a un nivel de significación del 10%, la hipótesis de que el valor medio del ICA en la escuela es mayor que 94,4. Indique claramente la hipótesis nula y la hipótesis alternativa y la conclusión de la prueba en este contexto. [6]

La directora ahora supone que la distribución de los valores del ICA en la escuela sigue una distribución normal de media 97,8 y desviación típica igual a 17,2.

- (h) Utilice este modelo para hallar el número esperado de días al año (redondeando al número entero de días más próximo) en los que el valor del ICA se puede calificar de “bueno”. [3]

2. [Puntuación máxima: 27]

George está analizando el crecimiento del número de vehículos eléctricos (VE) que hay en la Unión Europea con el fin de investigar algunas de las dificultades que pueden surgir para poder cumplir el objetivo de prohibir la venta de coches de gasolina y diésel en 2035.

George comienza su investigación prediciendo cuántos vehículos eléctricos (VE) habrá en la Unión Europea en 2035.

El número de VE que hay en la Unión Europea (N , en millones), se muestra en la siguiente tabla. El tiempo t se mide en años transcurridos desde el **comienzo** de 2016, donde $t \in \mathbb{R}$.

Al final del año...	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
t	1	2	3	4	5	6	7
N	0,2	0,3	0,4	0,6	1,1	1,9	3,1

George modeliza este conjunto de datos utilizando la función logística $N = \frac{310}{1 + Ce^{-kt}}$, donde $C, k \in \mathbb{R}^+$.

- (a) Explique, en el contexto de la pregunta, el significado del 310 que aparece en la función logística de George. [1]
- (b) (i) Utilice el valor de N en el instante $t = 1$ para mostrar que $C = 1549e^k$. [2]
- (ii) Utilice el valor de N en el instante $t = 7$ para hallar una segunda expresión para C . [3]
- (c) Utilice las respuestas dadas en el apartado (b) para hallar un valor para:
- (i) k . [2]
- (ii) C . [1]

George utiliza su modelo para predecir valores de N al final de los años 2017 a 2021. Estos valores —redondeando a una cifra decimal— se muestran en la siguiente tabla.

Al final del año...	2017	2018	2019	2020	2021
t	2	3	4	5	6
N	0,3	0,4	0,6	1,1	1,9
Valores predichos	0,3	0,5	a	1,2	2,0

- (d) Calcule el valor de a , redondeando a una cifra decimal. [2]
- (e) Utilizando ese valor de a redondeado a una cifra decimal, halle la suma de los cuadrados de los residuos (SS_{res}) cuando se utiliza este modelo para predecir los valores de N . [2]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 2: continuación)

Como medida de lo bien que se ajusta el modelo a los datos, George utiliza la función error E ,

donde $E = \sqrt{\frac{SS_{res}}{n}}$ y n es el número de predicciones que se han hecho utilizando el modelo.

George decide que utilizará este modelo si E es menor que 0,25.

(f) Hallando el valor de E para el modelo de George, muestre que George decidirá que sí que se puede utilizar el modelo. [3]

(g) Utilice el modelo para predecir el número de VE que habrá en la Unión Europea al final del año 2035. [2]

Una de las principales dificultades para poder cumplir el objetivo de la Unión Europea es la instalación de suficientes puntos de carga.

La Unión Europea calcula que el 80% de los propietarios de coches eléctricos podrán cargar su coche en casa y que el 20% restante necesitará puntos de carga públicos. Está previsto que haya un punto de carga público por cada 10 coches que lo necesiten.

(h) Utilice el modelo de George para hallar una expresión que dé el número total de puntos de carga públicos que se necesitarán en el instante t . [2]

Al final del año 2020 había en la Unión Europea 0,22 millones de puntos de carga públicos y al final del año 2022 había 0,54 millones.

(i) Halle el número promedio de puntos de carga públicos que se han instalado cada año durante este período. [1]

George supone que el número de puntos de carga públicos seguirá creciendo en forma lineal, al mismo ritmo hasta 2035.

(j) Determine el valor de t , donde $t \geq 5$, para el cual el número de puntos de carga será, por primera vez, insuficiente para cubrir la demanda. A partir de lo anterior, determine en qué año ocurrirá esto. [6]