

© International Baccalaureate Organization 2025

All rights reserved. No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without the prior written permission from the IB. Additionally, the license tied with this product prohibits use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, whether fee-covered or not, is prohibited and is a criminal offense.

More information on how to request written permission in the form of a license can be obtained from <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organisation du Baccalauréat International 2025

Tous droits réservés. Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite préalable de l'IB. De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, moyennant paiement ou non, est interdite et constitue une infraction pénale.

Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour obtenir une autorisation écrite sous la forme d'une licence, rendez-vous à l'adresse <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organización del Bachillerato Internacional, 2025

Todos los derechos reservados. No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin la previa autorización por escrito del IB. Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales—, ya sea incluido en tasas o no, está prohibido y constituye un delito.

En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una autorización por escrito en forma de licencia: <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

Matemáticas: Aplicaciones e Interpretación

Nivel Superior

Prueba 2

16 de mayo de 2025

Zona A mañana | **Zona B** mañana | **Zona C** mañana

2 horas

Instrucciones para los alumnos

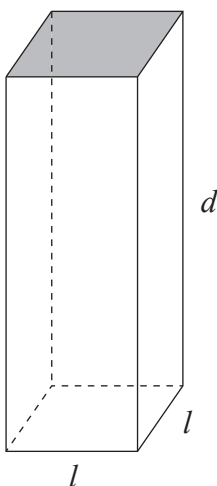
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Matemáticas: Aplicaciones e Interpretación NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[110 puntos]**.

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada pregunta. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención. Por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 20]

Kailash fabrica recipientes para bebidas en forma de ortoedro. El recipiente tiene una parte superior cuadrada y una base cuadrada de l cm de longitud. Su altura (d cm) es tres veces la longitud de la base.

la figura no está dibujada a escala



- (a) Escriba una expresión que dé d en función de l . [1]

En el recipiente caben 375 cm^3 de bebida.

- (b) Halle el valor de l y el de d . [3]

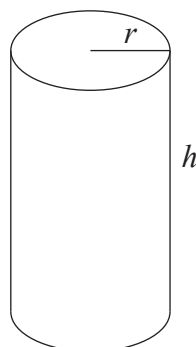
- (c) Calcule el área total de la superficie externa del recipiente. [3]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 1: continuación)

Para reducir el impacto medioambiental, Kailash está tratando de minimizar la cantidad de material que se necesita para fabricar el recipiente de 375 cm^3 .

Está dispuesto a cambiarlo de forma, y que sea un cilindro de radio $r \text{ cm}$ y altura $h \text{ cm}$, como se muestra a continuación.



En el recipiente cilíndrico también tienen que caber 375 cm^3 de bebida.

(d) Halle una expresión que dé la altura (h) del recipiente en función de r . [2]

Sea $A \text{ cm}^2$ el área total de la superficie externa.

(e) Muestre que $A = 2\pi r^2 + \frac{750}{r}$. [2]

(f) Halle $\frac{dA}{dr}$. [3]

(g) A partir de lo anterior, o de cualquier otro modo alternativo:

(i) Halle el valor de r para el que se minimiza A .

(ii) Halle el valor mínimo de A que se necesita para el cilindro. [3]

(h) (i) Halle $\frac{d^2 A}{dr^2}$.

(ii) A partir de lo anterior, determine si el gráfico de A , para $r > 0$, es cóncavo hacia arriba o cóncavo hacia abajo. Justifique su respuesta. [3]

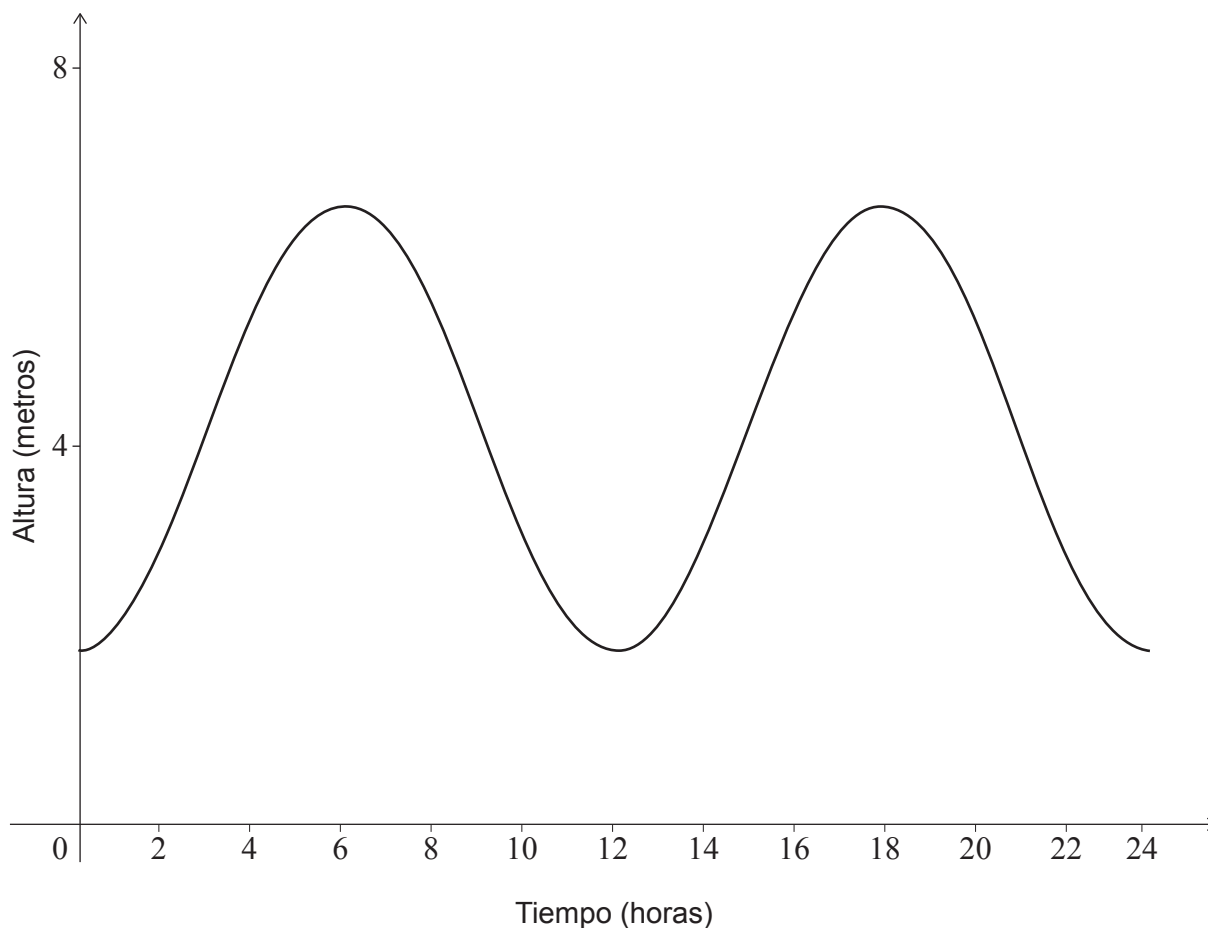
2. [Puntuación máxima: 15]

En un día concreto, la altura de la marea (h , en metros) en el puerto de Albion se puede modelizar mediante la función:

$$h(t) = -2,5 \cos(bt^\circ) + 4,5, \text{ donde } b \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq 24$$

y t representa el número de horas transcurridas desde medianoche.

En la siguiente figura se muestra el gráfico de h .



- (a) Muestre que el valor de b es 30. [1]
- (b) Halle la altura de la marea en el instante $t = 5$. [2]
- (c) Escriba:
 - (i) La amplitud de h .
 - (ii) La ecuación del eje principal. [3]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 2: continuación)

Los barcos solo pueden salir o regresar al puerto de Albion cuando la altura de la marea es mayor que 2,65 m.

Robin sabe que, debido a las condiciones meteorológicas locales, podría haber errores en el valor de la altura de la marea (h) que predice el modelo. La verdadera altura puede estar hasta 10 cm por encima o por debajo del valor de h .

Robin quiere salir del puerto para ir a pescar tan pronto como sea posible después de las 12.00.

- (d) Utilice la información anterior para determinar la hora más temprana a la que Robin podrá salir del puerto. Dé la respuesta redondeando al número entero de minutos más cercano.

[4]

El barco tardará 15 minutos en navegar desde el puerto hasta el lugar de pesca. Robin tiene previsto regresar al puerto ese mismo día. Quiere estar seguro de que podrá entrar de nuevo en el puerto.

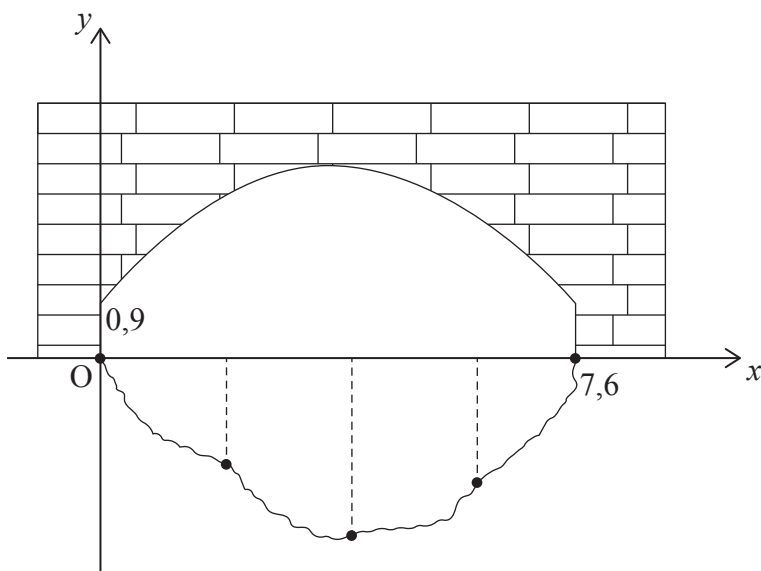
- (e) Determine el tiempo máximo (en horas) que podrá pasar en el sitio de pesca y aun así estar seguro de que, a su regreso, podrá entrar de nuevo en el puerto.

[5]

3. [Puntuación máxima: 12]

La figura muestra la sección transversal de un puente y un río. Se ha añadido un sistema de coordenadas cuyo origen O está en el punto en el que el puente y el agua se encuentran, en una de las orillas. Las unidades de todos los valores son metros.

la figura no está dibujada a escala



Un investigador quiere calcular el volumen de agua que fluye bajo el puente. Para hacer esto va midiendo la profundidad del río cada 1,9 m a partir de O . En la siguiente tabla se muestran las profundidades obtenidas.

Distancia en horizontal desde O (metros)	0	1,9	3,8	5,7	7,6
Profundidad en vertical del agua (metros)	0	1,68	2,81	2,32	0

- (a) Utilice la regla del trapecio para hallar el área de la sección transversal del río a su paso bajo el puente.

[3]

El agua fluye bajo el puente a una velocidad de $0,3 \text{ m s}^{-1}$.

- (b) Halle el volumen de agua que pasa bajo el puente cada segundo.

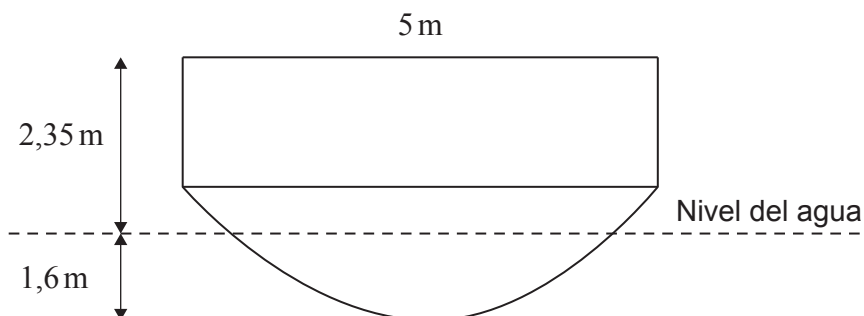
[2]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 3: continuación)

Hay un barco que está navegando por el río. En la siguiente figura se muestra la sección transversal del barco y el nivel del agua.

La parte superior del barco es paralela al nivel del agua y mide 5 m de ancho. La altura del barco es 2,35 m por encima del nivel del agua y la parte inferior del barco está sumergida 1,6 m por debajo del nivel del agua.



El barco se está desplazando por el centro del río.

- (c) Halle la distancia en vertical que hay entre la parte inferior del barco y el fondo del río cuando pasa bajo el puente. [1]

El arco curvo del puente se puede modelizar mediante la ecuación:

$$y = -0,15x^2 + 1,14x + 0,9, \quad 0 \leq x \leq 7,6$$

- (d) Halle la altura máxima del arco curvo respecto al nivel del agua. [2]
- (e) Determine si la parte superior del barco podrá pasar bajo el puente. [4]

4. [Puntuación máximas: 16]

Las rutas de los transbordadores que recorren cinco puertos (de A a E) se pueden representar mediante el grafo G .

La matriz de adyacencia M correspondiente al grafo G se muestra a continuación.

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D & E \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

- (a) Indique qué ruta directa entre puertos solo se puede recorrer en una dirección. [1]
- (b) Hallando una matriz adecuada:
- (i) Muestre que no es posible llegar a todos los puertos partiendo desde otro puerto cualquiera en **exactamente** tres viajes.
- (ii) Indique si es (o no) posible llegar a todos los puertos partiendo desde otro puerto cualquiera en tres viajes o menos. Justifique su respuesta. [5]

Llega el verano, y las rutas de los transbordadores tienen un nuevo horario. En la siguiente tabla se muestra el costo mínimo (en euros [EUR]) del viaje entre dos puertos.

Puerto	A	B	C	D	E
A	0	3	7	8	5
B	3	0	4	9	6
C	7	4	0	a	10
D	8	9	a	0	3
E	5	6	10	3	0

- (c) Dado que no existe una ruta directa entre D y C o entre C y D, muestre que el valor de a es EUR 13. Antes de dar la respuesta, asegúrese de que se haya planteado todas las rutas posibles. [3]
- (d) Empezando en A, utilice el algoritmo del vecino más cercano para hallar un límite superior para el costo de visitar todos los puertos y volver al lugar de partida. [3]
- (e) Borrando primero el vértice A, utilice el algoritmo del vértice borrado para hallar un límite inferior para el costo de visitar todos los puertos. [4]

5. [Puntuación máxima: 15]

La posición de una partícula P_1 , t segundos después de haber salido del punto A, viene dada por:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad t \geq 0$$

Las unidades de distancia son metros.

(a) Escriba las coordenadas de A. [1]

Cinco segundos después de haber partido de A, P_1 está en el punto B.

(b) Halle:

(i) $\vec{AB}$.

(ii) $\left| \vec{AB} \right|$. [4]

Una segunda partícula P_2 sale de A al mismo tiempo que P_1 . P_2 se mueve en la dirección del

vector $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y pasa por un punto C.

(c) Halle $\hat{CAB}$. [5]

La partícula P_2 tiene una celeridad de 12 m s^{-1} .

(d) Halle la distancia que hay entre P_1 y P_2 en el instante $t = 5$. [5]

Página en blanco

6. [Puntuación máxima: 15]

Daphne regenta una cafetería y tiene que decidir si debe (o no) contratar a más personal.

A lo largo de un período prolongado, el personal va recogiendo datos sobre el número de clientes (C) que están haciendo cola cuando entra en la cafetería un nuevo cliente. La distribución de probabilidad de C se muestra en la siguiente tabla.

Número de clientes que hacen cola (c)	0	1	2	3	≥ 4
$P(C = c)$	0,21	0,34	0,28	0,17	0

- (a) (i) Halle la probabilidad de que haya al menos dos clientes haciendo cola cuando llegue un nuevo cliente.

- (ii) Halle $E(C)$.

[3]

El tiempo (T , en segundos) que se tarda en atender a cada cliente se puede modelizar mediante la distribución normal $T \sim N(115, 28^2)$.

A Daphne le dicen que para hallar una estimación del tiempo esperado que tendrá que hacer cola un cliente antes de que le atiendan, puede calcular $E(C) \times E(T)$.

- (b) Halle el valor de $E(C) \times E(T)$.

[2]

Ahora Daphne decide que sí que contratará a un nuevo miembro del personal si la probabilidad de que un cliente tenga que hacer cola durante más de tres minutos antes de que lo atiendan es mayor que 0,4.

- (c) Utilizando la distribución T dada anteriormente, halle la probabilidad de que tarden más de tres minutos en atender a un cliente elegido al azar.

[2]

- (d) Halle la probabilidad de que tarden más de tres minutos en total en atender a dos clientes elegidos al azar. Puede suponer que el tiempo que se tarda en atender a cada persona es independiente de los tiempos que se han tardado en atender al resto de personas.

[4]

Daphne supone que, cuando llega un nuevo cliente, la persona que está al principio de la cola justo acaba de llegar al mostrador de la cafetería. También supone que la probabilidad de que tarden más de tres minutos en atender a tres clientes es igual a 1.

- (e) Utilizando las suposiciones de Daphne y las probabilidades de C dadas en la tabla anterior:

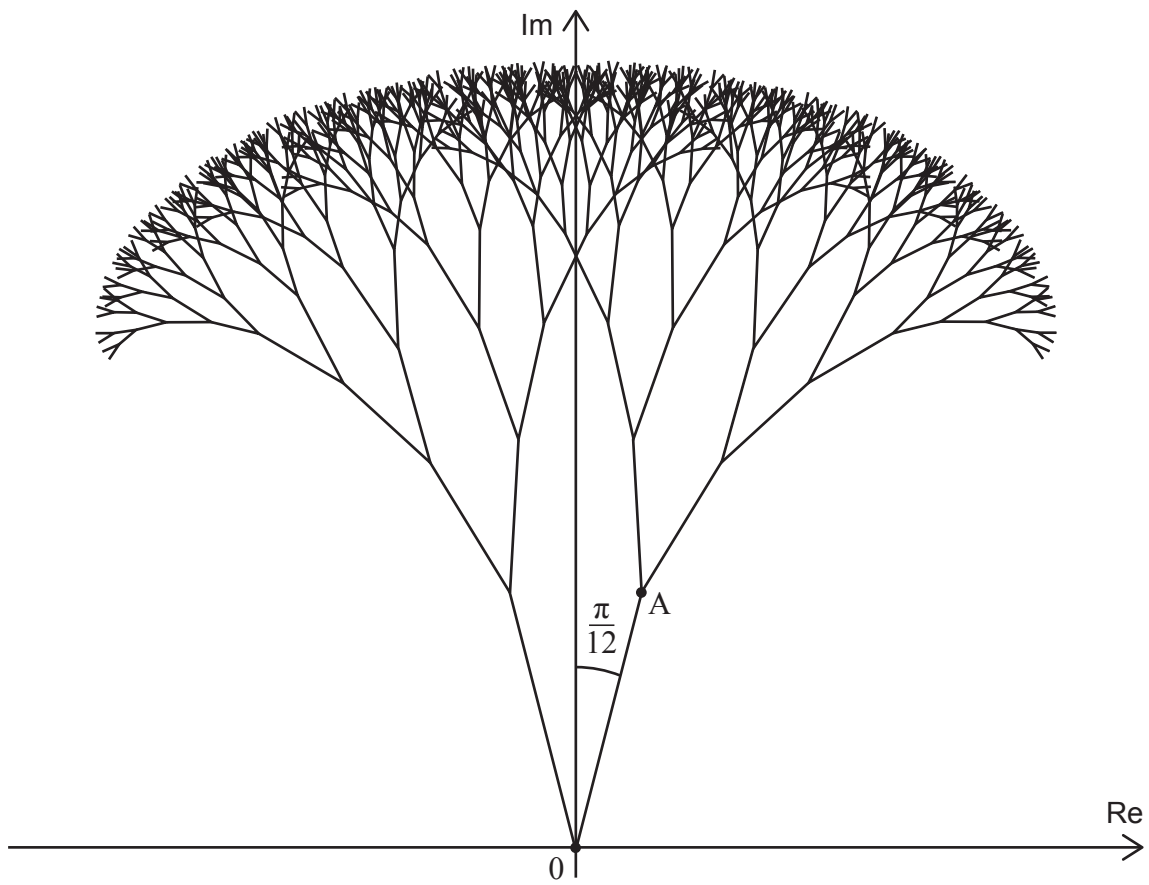
- (i) Halle la probabilidad de que un cliente que acaba de llegar a la cafetería tenga que hacer cola durante más de tres minutos antes de que lo atiendan.

- (ii) A partir de lo anterior, indique si Daphne decidirá (o no) contratar a más personal.

[4]

7. [Puntuación máxima: 17]

En el siguiente diagrama de Argand se muestra un árbol fractal.



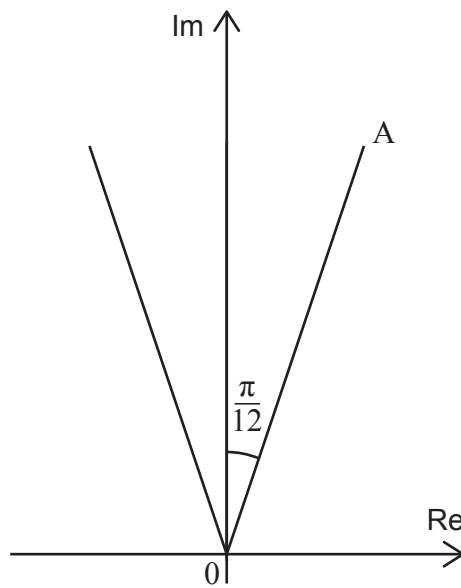
(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 7: continuación)

El árbol se genera de la siguiente manera:

El segmento de recta que va de 0 a $5i$ se rota en sentido de las agujas del reloj $\frac{\pi}{12}$ alrededor del 0 para generar la primera rama y luego se rota en sentido contrario a las agujas del reloj $\frac{\pi}{12}$ alrededor del 0 para generar la segunda rama. El extremo de una de estas ramas aparece rotulado como A en la **Figura 1**.

Figura 1



- (a) Halle el número complejo que representa el punto A; dé la respuesta en forma exponencial.

[3]

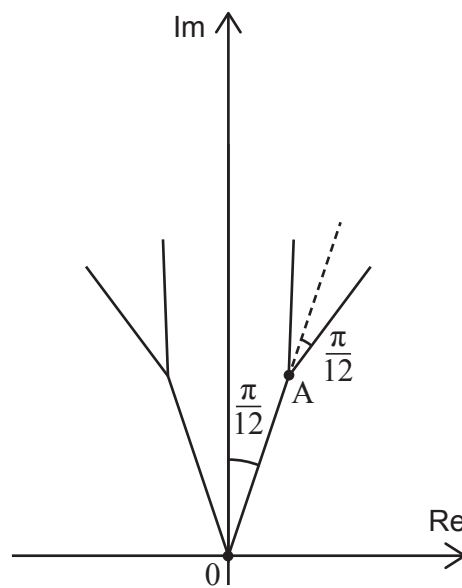
(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 7: continuación)

Las siguientes ramas se crean añadiendo dos ramas al extremo de cada rama creada en la etapa anterior.

Cada rama nueva mide de largo un 70% de la longitud de la rama anterior. Una de las ramas nuevas se rota $\frac{\pi}{12}$ en sentido de las agujas del reloj respecto a la dirección de la rama anterior y la otra se rota ese mismo ángulo en sentido contrario a las agujas del reloj. Toda esta información se muestra en la **Figura 2**.

Figura 2



Este proceso continúa, utilizando el extremo de todas las ramas generadas en la etapa anterior como centro de rotación para la siguiente etapa.

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 7: continuación)

En las **Figuras 3** y **4** se muestran los árboles obtenidos tras la 3.^a y la 10.^a etapa, respectivamente.

Figura 3

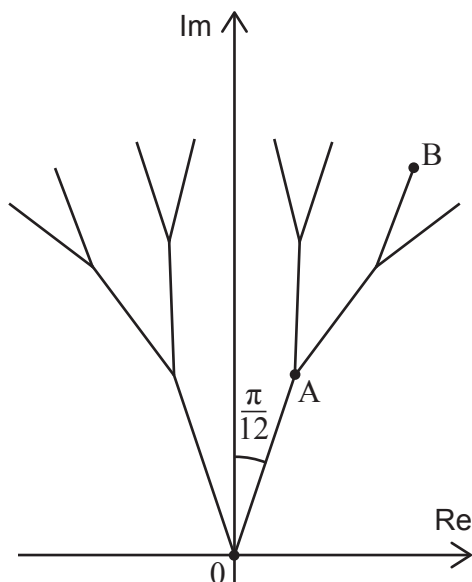
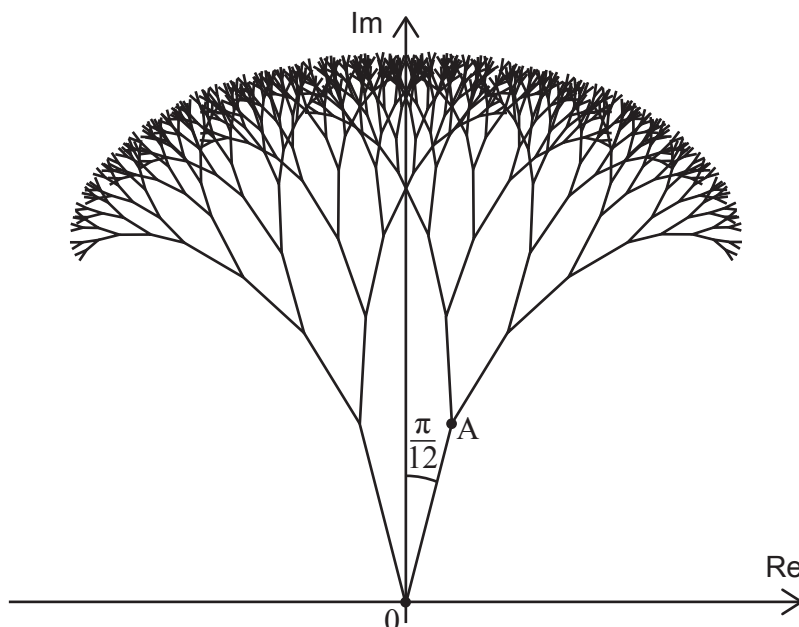


Figura 4



- (b) (i) Muestre que la longitud total de todas las ramas que tiene el árbol tras la segunda etapa (**Figura 2**) es igual a 24.
- (ii) Halle la longitud total de todas las ramas tras 10 etapas (**Figura 4**).
- (iii) Si este proceso continúa indefinidamente, indique si existe (o no) un límite para la longitud total de todas las ramas. Justifique su respuesta. [9]

Sea b el número complejo que representa el punto B de la **Figura 3**.

- (c) (i) Halle una expresión para b que sea la suma de tres números complejos, cada uno de ellos escrito en forma exponencial.
- (ii) A partir de lo anterior, escriba b en la forma $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$. [5]