

© International Baccalaureate Organization 2025

All rights reserved. No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without the prior written permission from the IB. Additionally, the license tied with this product prohibits use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, whether fee-covered or not, is prohibited and is a criminal offense.

More information on how to request written permission in the form of a license can be obtained from <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organisation du Baccalauréat International 2025

Tous droits réservés. Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite préalable de l'IB. De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, moyennant paiement ou non, est interdite et constitue une infraction pénale.

Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour obtenir une autorisation écrite sous la forme d'une licence, rendez-vous à l'adresse <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organización del Bachillerato Internacional, 2025

Todos los derechos reservados. No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin la previa autorización por escrito del IB. Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales—, ya sea incluido en tasas o no, está prohibido y constituye un delito.

En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una autorización por escrito en forma de licencia: <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

# Mathématiques : applications et interprétation

## Niveau supérieur

### Épreuve 2

16 mai 2025

Zone A matin | Zone B matin | Zone C matin

2 heures

---

#### Instructions destinées aux candidates et aux candidats

- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Répondez à toutes les questions sur le livret de réponses prévu à cet effet.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour le cours de mathématiques : applications et interprétation NS** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est de **[110 points]**.

Répondez à **toutes** les questions sur le livret de réponses fourni. Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. Les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

1. [Note maximale: 16]

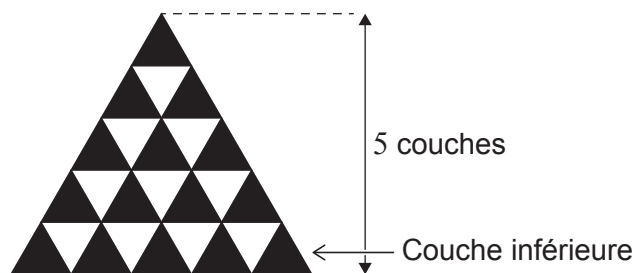
Les coussins thaïlandais sont conçus avec une section transversale triangulaire et sont constitués de couches de coussins plus petits. Ces coussins peuvent être modélisés comme des prismes triangulaires.

Ceci est montré dans le diagramme suivant.

la figure n'est pas à l'échelle



Coussin thaïlandais à 4 couches



Section transversale d'un coussin thaïlandais à 5 couches

(a) Écrivez le nombre de prismes triangulaires dans la couche inférieure du coussin à

(i) 4 couches ;

(ii) 5 couches.

[2]

Mayumi remarque que le nombre de prismes triangulaires dans la couche inférieure des coussins forme une suite arithmétique.

(b) (i) Écrivez la raison de cette suite.

(ii) Trouvez une expression pour le nombre de prismes triangulaires dans la couche inférieure d'un coussin à  $n$  couches.

[3]

(Suite de la question à la page suivante)

**(Suite de la question 1)**

Mayumi souhaite prolonger ce motif pour créer un coussin à 9 couches.

- (c) (i) Trouvez le nombre de prismes triangulaires dans la couche inférieure du coussin de Mayumi. [3]
- (ii) Calculez le nombre **total** de prismes triangulaires dans le coussin de Mayumi. [3]
- (d) Trouvez une expression pour le nombre **total** de prismes triangulaires dans un coussin à  $n$  couches, en donnant votre réponse sous sa forme la plus simple. [2]

La section transversale du coussin est composée de triangles noirs et de triangles blancs.



Ce coussin à 4 couches possède un total de 6 triangles blancs.



Ce coussin à 5 couches possède 4 triangles blancs dans sa couche inférieure.

- (e) Écrivez le nombre total de triangles noirs dans un coussin à 4 couches. [1]

Le nombre de triangles noirs dans chaque couche forme une suite arithmétique.

- (f) Trouvez et simplifiez une expression pour le nombre total de triangles noirs dans un coussin à  $n$  couches. [2]

Le nombre total de triangles blancs dans un coussin à  $n$  couches est  $\frac{n(n-1)}{2}$ .

- (g) En utilisant l'expression donnée et votre réponse à la partie (f), trouvez et simplifiez une expression pour le nombre total de triangles noirs et blancs dans un coussin à  $n$  couches. [3]

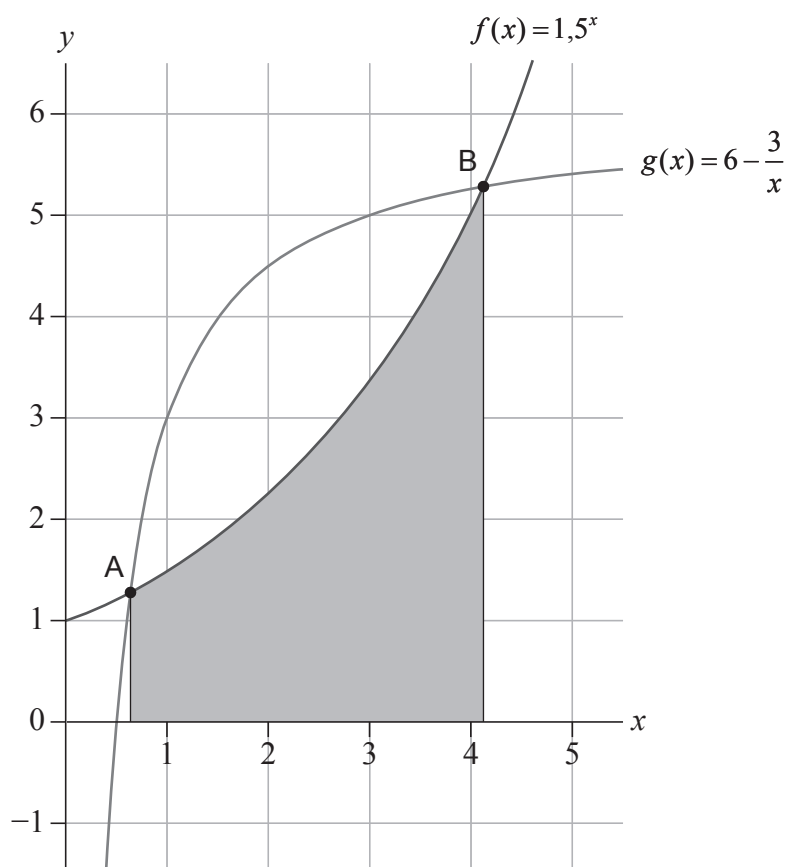
Page vierge

2. [Note maximale: 12]

Le diagramme montre une partie des représentations graphiques des fonctions

$$f(x) = 1,5^x \quad x \geq 0$$

$$g(x) = 6 - \frac{3}{x} \quad x > 0.$$



(a) Résolvez  $f(x) = g(x)$ . [3]

(b) (i) Écrivez l'intégrale qui représente l'aire de la région grisée.

(ii) Calculez l'aire de cette région grisée.

(iii) À partir de là ou par toute autre méthode, calculez l'aire de la région comprise entre les courbes  $y = f(x)$  et  $y = g(x)$ . [6]

La tangente à la représentation graphique de  $y = f(x)$  est parallèle à la tangente à la représentation graphique de  $y = g(x)$  en  $x = k$ .

(c) Trouvez la valeur de  $k$ . [3]

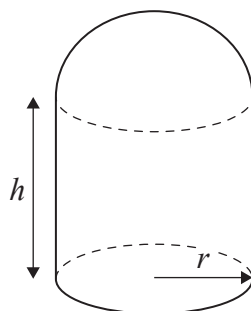
3. [Note maximale: 16]

Ju Shen conçoit un couvercle en plastique de forme cylindrique combiné avec un hémisphère sur le dessus, comme montré dans le diagramme.

Le plastique utilisé pour fabriquer le couvercle forme la surface incurvée de l'hémisphère et du cylindre ; le couvercle n'a pas de fond, mais il repose sur une surface horizontale plane.

Soit  $h$  cm la hauteur du cylindre et  $r$  cm le rayon interne de sa base.

la figure n'est pas à l'échelle



- (a) Trouvez une expression pour l'aire de la surface interne totale du couvercle,  $A \text{ cm}^2$ , en fonction de  $r$  et  $h$ . [2]
- (b) Montrez que le volume total,  $V \text{ cm}^3$ , délimité par le couvercle et la surface horizontale est donné par l'expression

$$V = \frac{2\pi r^3 + 3\pi r^2 h}{3}. \quad [2]$$

Le volume total délimité par le couvercle est de  $10\,000 \text{ cm}^3$ .

- (c) À partir de là, montrez que  $h = \frac{30\,000 - 2\pi r^3}{3\pi r^2}$ . [2]

Ju Shen utilise l'aire de la surface interne totale pour modéliser la quantité de plastique utilisée pour construire le couvercle.

- (d) Montrez que  $A$  est donnée par l'expression

$$A = \frac{2\pi r^2}{3} + \frac{20\,000}{r}. \quad [2]$$

(Suite de la question à la page suivante)

**(Suite de la question 3)**

Ju Shen souhaite utiliser la quantité minimale de plastique dans la construction du couvercle.

- (e) Trouvez une expression pour  $\frac{dA}{dr}$ . [3]
- (f) Trouvez la valeur de  $r$  et la valeur de  $h$  qui minimise l'utilisation de plastique. [4]
- (g) En interprétant votre réponse à la partie (f), suggérez la meilleure forme pour le couvercle en plastique de Ju Shen. [1]



4. [Note maximale: 13]

Un parc éolien est composé de cinq éoliennes, situées aux points A à E.

Le tableau ci-dessous indique les distances, en kilomètres, entre chaque paire d'éoliennes.

|   | A    | B    | C    | D    | E    |
|---|------|------|------|------|------|
| A |      | 0,90 | 0,88 | 1,56 | 0,86 |
| B | 0,90 |      | 0,74 | 0,94 | 1,28 |
| C | 0,88 | 0,74 |      | 0,78 | 0,62 |
| D | 1,56 | 0,94 | 0,78 |      | 1,36 |
| E | 0,86 | 1,28 | 0,62 | 1,36 |      |

Les éoliennes doivent toutes être reliées par des câbles. Cependant, il n'est pas nécessaire qu'il y ait une connexion directe entre chaque paire.

- (a) Utilisez l'algorithme de Prim, en commençant au sommet A, pour trouver la longueur totale minimale de câble nécessaire pour relier les éoliennes. Montrez l'ordre dans lequel vous avez ajouté les sommets.

[4]

Le superviseur du parc éolien dispose d'une cabine de surveillance située au point F. Les distances de F à chaque éolienne sont indiquées dans le tableau.

| Éolienne                    | A    | B    | C    | D    | E    |
|-----------------------------|------|------|------|------|------|
| Distance à partir de F (km) | 0,96 | 1,82 | 1,57 | 2,24 | 1,14 |

Le superviseur souhaite visiter chaque éolienne exactement une fois pour l'inspection, en commençant et en terminant à la cabine, et en empruntant le chemin le plus court possible.

- (b) En effaçant le sommet F, trouvez une borne inférieure pour la longueur du chemin le plus court.
- (c) Utilisez l'algorithme du plus proche voisin en commençant au sommet F pour trouver une borne supérieure pour la longueur du chemin le plus court.

[2]

[3]

(Suite de la question à la page suivante)

**(Suite de la question 4)**

Le tableau ci-dessous montre les bornes inférieures trouvées en effaçant chacun des cinq autres sommets et les bornes supérieures trouvées en commençant à chacun des cinq autres sommets.

| Sommet           | A    | B    | C    | D    | E    |
|------------------|------|------|------|------|------|
| Borne inférieure | 5,02 | 4,86 | 5,02 | 4,90 | 4,84 |
| Borne supérieure | 6,36 | 6,36 | 7,13 | 7,22 | 6,82 |

Le superviseur se déplace entre les éoliennes à une vitesse constante de 28 km/h et passe 12 minutes à inspecter chaque éolienne.

- (d) À partir des informations fournies dans le tableau, trouvez les meilleures bornes supérieures et inférieures possibles pour le temps le plus court,  $T$  heures, nécessaire pour l'inspection. Rédigez votre réponse sous forme d'inéquation.

[4]

5. [Note maximale: 15]

Un zoologiste recueille un échantillon de coléoptères de la canne à sucre. Il mesure leur longueur et les classe en « petits » (de 10 à 12 mm de long), « moyens » (de 12 à 16 mm de long) et « grands » (de 16 à 18 mm de long). Il note également leur sexe et enregistre les effectifs dans le tableau suivant.

|      |         | Longueur, $x$ mm          |                           |                           |
|------|---------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
|      |         | Petit<br>$10 < x \leq 12$ | Moyen<br>$12 < x \leq 16$ | Grand<br>$16 < x \leq 18$ |
| Sexe | Femelle | 42                        | 25                        | 19                        |
|      | Mâle    | 61                        | 27                        | 12                        |

(a) Trouvez le nombre de coléoptères de la canne à sucre dans l'échantillon du zoologiste. [1]

(b) D'après cet ensemble de données, estimez la longueur moyenne d'un coléoptère de la canne à sucre. [2]

Deux coléoptères femelles sont choisis au hasard avec remise dans l'échantillon.

(c) Trouvez la probabilité que ces deux coléoptères soient tous les deux classés comme petits. [3]

(d) Testez, au niveau de signification de 5 %, l'hypothèse nulle selon laquelle la catégorie de longueur et le sexe sont indépendants. Indiquez la valeur  $p$  de votre test et donnez votre conclusion dans le contexte. Justifiez votre réponse. [4]

Soit  $\phi$  la proportion de coléoptères de la canne à sucre mâles dans la population.

(e) Testez, au niveau de signification de 5 %, l'hypothèse selon laquelle plus de 45 % de coléoptères de la canne à sucre sont des mâles. Donnez l'hypothèse nulle et l'hypothèse alternative. Indiquez la valeur  $p$  de votre test et donnez votre conclusion dans le contexte. [5]

6. [Note maximale: 21]

Une analyste financière modélise l'évolution de la valeur d'une action,  $x$  dollars au temps  $t$  minutes, après la publication d'un rapport. Elle utilise l'équation différentielle

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 3x = 0.$$

Cette équation peut être écrite comme les équations différentielles couplées

$$\frac{dx}{dt} = y$$

$$\frac{dy}{dt} = -3x - 4y.$$

- (a) Trouvez la solution générale pour  $x$ . [5]

Initialement,  $x = 0$  et  $\frac{dx}{dt} = -1$ .

- (b) (i) Trouvez une expression pour  $x$  en fonction de  $t$ .  
(ii) Esquissez  $x$  en fonction de  $t$  dans l'intervalle  $0 \leq t \leq 4$ . [6]

Une fois le rapport publié, l'analyste va acheter des actions puis les revendre plus tard.

- (c) (i) Utilisez votre représentation graphique pour trouver combien de temps après la publication du rapport l'analyste devrait attendre pour acheter les actions afin de maximiser son profit.  
(ii) Trouvez la borne supérieure du profit par action que l'analyste peut réaliser. [4]

Un modèle amélioré s'écrit comme suit :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 3x = x \sin t.$$

Les mêmes conditions initiales que ci-dessus s'appliquent.

- (d) Utilisez la méthode d'Euler avec un pas de  $t = 0,1$  pour prédire la valeur de  $x$  lorsque  $t = 1$ . [6]

7. [Note maximale: 17]

Un jour donné, la probabilité qu'Emlyn charge son téléphone dépend uniquement du fait qu'il l'ait chargé la veille.

S'il a chargé son téléphone la veille, la probabilité qu'il le charge aujourd'hui est de 0,4.

S'il n'a pas chargé son téléphone la veille, la probabilité qu'il le charge aujourd'hui est de  $p$ .

Le jour  $n$ , ceci peut être représenté en utilisant le vecteur  $\mathbf{v}_n$  où

$$\mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} \text{probabilité qu'Emlyn charge son téléphone le jour } n \\ \text{probabilité qu'Emlyn ne charge pas son téléphone le jour } n \end{pmatrix}$$

Un modèle de chaîne de Markov est créé, où

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{M}\mathbf{v}_n.$$

La matrice  $\mathbf{M}$  est de la forme  $\begin{pmatrix} a & p \\ b & 1-p \end{pmatrix}$ .

(a) Écrivez la valeur de

(i)  $a$  ;

(ii)  $b$ . [2]

(b) Le jour zéro, Emlyn charge son téléphone. Trouvez la probabilité

(i) qu'Emlyn charge son téléphone tous les jours de  $n = 1$  à  $n = 4$ .

(ii) qu'Emlyn charge son téléphone le jour 4, lorsque  $p = 0,7$ . [5]

(c) Démontrez que, pour toutes les valeurs de  $p$ , un vecteur propre de  $\mathbf{M}$  est  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  et à partir de là, indiquez la valeur propre correspondante. [4]

(d) Trouvez, en fonction de  $p$ , la probabilité qu'Emlyn charge son téléphone un jour donné à l'état stationnaire. [4]

À long terme, Emlyn veut charger son téléphone au moins 60 % des jours.

(e) Trouvez la valeur minimale de  $p$  requise pour que cela se produise. [2]

**Avertissement :**

Le contenu utilisé dans les évaluations de l'IB est extrait de sources authentiques issues de tierces parties. Les avis qui y sont exprimés appartiennent à leurs auteurs et/ou éditeurs, et ne reflètent pas nécessairement ceux de l'IB.

**Références :**

1. naisupakit, 2016. *Triangle Pillow tradition native Thai style pillow*. [Image en ligne] Disponible sur Internet : <https://www.gettyimages.co.uk/detail/photo/triangle-pillow-tradition-native-thai-style-pillow-royalty-free-image/623127206> [Référence du 9 avril 2024]. Source adaptée.

**Tous les autres textes, graphiques et illustrations : © Organisation du Baccalauréat International 2025**