

© International Baccalaureate Organization 2025

All rights reserved. No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without the prior written permission from the IB. Additionally, the license tied with this product prohibits use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, whether fee-covered or not, is prohibited and is a criminal offense.

More information on how to request written permission in the form of a license can be obtained from <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organisation du Baccalauréat International 2025

Tous droits réservés. Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite préalable de l'IB. De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, moyennant paiement ou non, est interdite et constitue une infraction pénale.

Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour obtenir une autorisation écrite sous la forme d'une licence, rendez-vous à l'adresse <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organización del Bachillerato Internacional, 2025

Todos los derechos reservados. No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin la previa autorización por escrito del IB. Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales—, ya sea incluido en tasas o no, está prohibido y constituye un delito.

En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una autorización por escrito en forma de licencia: <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

Mathématiques : analyse et approches

Niveau supérieur

Épreuve 3

21 mai 2025

Zone A après-midi | **Zone B** après-midi | **Zone C** après-midi

1 heure 15 minutes

Instructions destinées aux candidates et aux candidats

- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Répondez à toutes les questions sur le livret de réponses prévu à cet effet.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour les cours de mathématiques : analyse et approches NS** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est de **[55 points]**.

Répondez à **toutes** les questions sur le livret de réponses fourni. Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. Les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

1. [Note maximale : 27]

Cette question vous demande d'explorer des fonctions affines composées avec elles-mêmes de la forme $f(x) = mx + c$, pour différentes valeurs de m .

Pour une fonction f , la composition de la fonction avec elle-même est donnée par $(f \circ f)(x) = f(f(x))$.

Soit f^n la $n^{\text{ième}}$ composition de f avec elle-même où $f^n(x) = \underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{n \text{ fois}}(x)$.

Ainsi, par exemple, $f^2(x) = (f \circ f)(x)$ et $f^3(x) = (f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x)))$.

Considérez la fonction affine $f(x) = mx + c$, où $x \in \mathbb{R}$ et $m, c \in \mathbb{R}$.

(a) Montrez que

(i) $f^2(x) = m^2x + c(1 + m)$; [3]

(ii) $f^3(x) = m^3x + c(1 + m + m^2)$. [2]

(b) (i) Écrivez une expression pour $f^4(x)$. [1]

(ii) Suggérez une expression similaire pour $f^n(x)$, $n \in \mathbb{Z}^+$. [2]

(iii) En utilisant votre expression de la partie (b)(ii) ou par toute autre méthode, trouvez une expression en fonction de n pour $f^n(x)$ lorsque $m = 1$. [3]

(c) Pour $m \neq 1$, utilisez la récurrence pour prouver que

$$f^n(x) = m^n x + c \left(\frac{1 - m^n}{1 - m} \right) \text{ pour } n \in \mathbb{Z}^+. \quad [8]$$

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 1)

Considérez $f^n(x) = m^n x + c \left(\frac{1-m^n}{1-m} \right)$ où $-1 < m < 1$.

- (d) Lorsque $n \rightarrow \infty$, la famille des représentations graphiques de $y = f^n(x)$ s'approche de la représentation graphique d'une droite, L . Déterminez l'équation de L , en donnant votre réponse en fonction de c et m . [4]

Considérez $f^n(x) = m^n x + c \left(\frac{1-m^n}{1-m} \right)$ où $m = -1$.

- (e) (i) Montrez que $f^n(x) = -x + c$ lorsque n est impair. [2]
 (ii) Trouvez une expression pour $f^n(x)$ lorsque n est pair. [2]

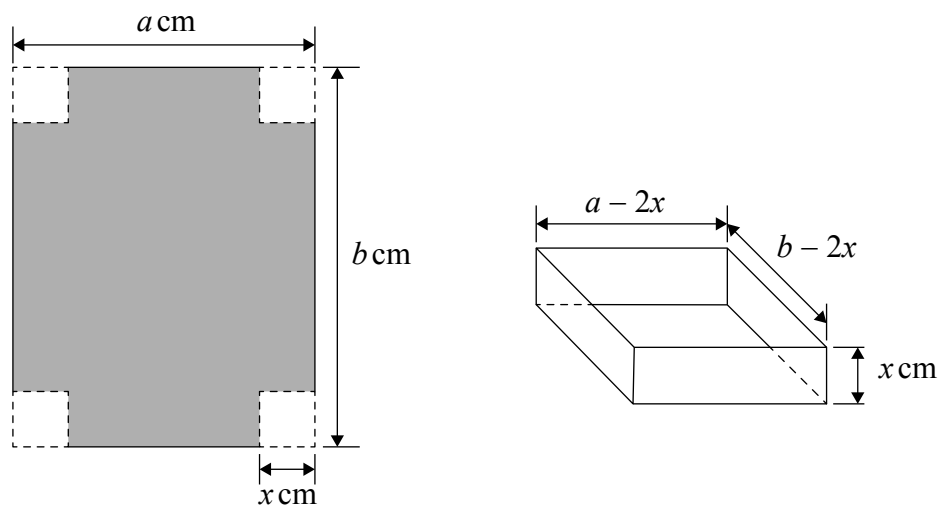
2. [Note maximale : 28]

Cette question vous demande de considérer des boîtes ouvertes sur le dessus, formées en coupant des coins carrés dans une feuille de carton de dimension $a \times b$ et en pliant les côtés. En particulier, il vous est demandé d'étudier les conditions pour lesquelles le volume maximal d'une boîte est un entier.

Une feuille de carton rectangulaire mesure a cm par b cm, où $a < b$.

Un carré dont le côté mesure x cm est découpé dans chaque coin et la feuille de carton ainsi obtenue est ensuite pliée pour former une boîte ouverte sur le dessus avec une base rectangulaire.

Ceci est montré dans les diagrammes suivants.



Le volume, $V \text{ cm}^3$, d'une boîte est donné par $V = x(a - 2x)(b - 2x)$, où $0 \leq x \leq \frac{a}{2}$.

(a) Écrivez la valeur de V lorsque

(i) $x = 0$; [1]

(ii) $x = \frac{a}{2}$. [1]

(b) Montrez que $V = 4x^3 - 2(a + b)x^2 + abx$. [2]

(c) Montrez que les seules solutions de $\frac{dV}{dx} = 0$ sont $x = \frac{(a + b) \pm \sqrt{a^2 - ab + b^2}}{6}$. [6]

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 2)

Dans les parties (d) et (e), les trois résultats suivants sont donnés.

$$x = \frac{(a+b) + \sqrt{a^2 - ab + b^2}}{6} \text{ se situe à l'extérieur de l'intervalle } 0 \leq x \leq \frac{a}{2}.$$

$$x = \frac{(a+b) - \sqrt{a^2 - ab + b^2}}{6} \text{ se situe à l'intérieur de l'intervalle } 0 \leq x \leq \frac{a}{2}.$$

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} > 0.$$

Soit $x_m = \frac{(a+b) - \sqrt{a^2 - ab + b^2}}{6}.$

(d) Utilisez $\frac{d^2V}{dx^2}$ pour montrer qu'il y a un maximum relatif de V en $x = x_m$. [5]

(e) Utilisez vos réponses des parties (a) et (d) pour expliquer pourquoi x_m donnera le volume maximal, V_m , de la boîte. [1]

Dans les parties (f) à (h), considérez une méthode pour générer des ensembles de valeurs positives entières pour x_m et, par conséquent, V_m .

Considérez le cas où $a = 2st - s^2$, $b = t^2 - s^2$ et $s, t \in \mathbb{Z}^+$.

(f) Sachant que $a < b$, montrez que $t > 2s$. [2]

On sait que $\sqrt{a^2 - ab + b^2} = s^2 - st + t^2$. Vous n'avez **pas** à montrer ce résultat.

(g) En substituant a, b et $\sqrt{a^2 - ab + b^2}$ en fonction de s et t , montrez que $x_m = \frac{s(t-s)}{2}$. [3]

(h) (i) Sachant que $a, b \in \mathbb{Z}^+$, utilisez $V_m = x_m(a - 2x_m)(b - 2x_m)$ pour expliquer pourquoi le fait que s soit pair implique que V_m est un entier. [2]

(ii) Indiquez une autre condition sur s et une condition correspondante sur t qui impliquent que x_m et V_m sont tous les deux entiers. [1]

(iii) À partir de là ou par toute autre méthode, trouvez une valeur entière de x_m et la valeur entière correspondante de V_m . [4]