

© International Baccalaureate Organization 2025

All rights reserved. No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without the prior written permission from the IB. Additionally, the license tied with this product prohibits use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, whether fee-covered or not, is prohibited and is a criminal offense.

More information on how to request written permission in the form of a license can be obtained from <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organisation du Baccalauréat International 2025

Tous droits réservés. Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite préalable de l'IB. De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, moyennant paiement ou non, est interdite et constitue une infraction pénale.

Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour obtenir une autorisation écrite sous la forme d'une licence, rendez-vous à l'adresse <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organización del Bachillerato Internacional, 2025

Todos los derechos reservados. No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin la previa autorización por escrito del IB. Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales—, ya sea incluido en tasas o no, está prohibido y constituye un delito.

En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una autorización por escrito en forma de licencia: <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

## Matemáticas: Análisis y Enfoques

### Nivel Superior

### Prueba 3

21 de mayo de 2025

**Zona A** tarde | **Zona B** tarde | **Zona C** tarde

1 hora 15 minutos

---

#### Instrucciones para los alumnos

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Matemáticas: Análisis y Enfoques NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[55 puntos]**.

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 28]

**En la siguiente pregunta se exploran las características de una familia de curvas. Esta familia luego se vincula a una ecuación diferencial homogénea.**

Considere la curva que viene dada por  $y = \frac{x(x^2 - 16)}{x^2 + 16}$ .

(a) (i) Dibuje aproximadamente la curva de  $y$  para  $-10 \leq x \leq 10$ . [1]

(ii) Indique las coordenadas de los puntos en los que la curva atraviesa el eje  $x$ . [1]

(iii) Indique las coordenadas del máximo local y las coordenadas del mínimo local. [2]

(b) Indique si la función  $f(x) = \frac{x(x^2 - 16)}{x^2 + 16}$  es par, impar o ninguna de las dos cosas.

Justifique su respuesta. [2]

Ahora considere la curva general que viene dada por  $y = \frac{x(x^2 - A)}{x^2 + A}$ , donde  $A$  es una constante positiva y  $x \in \mathbb{R}$ .

(c) Dada  $f(x) = \frac{x(x^2 - A)}{x^2 + A}$ , pruebe que  $f'(\sqrt{A})$  es independiente de  $A$ . [4]

(d) (i) Muestre que  $x - \frac{2Ax}{x^2 + A} \equiv \frac{x(x^2 - A)}{x^2 + A}$ . [2]

(ii) A partir de lo anterior, determine la ecuación de la asíntota oblicua de la curva. [1]

(iii) Escriba las coordenadas de un punto de la curva en el que la asíntota oblicua sea paralela a la tangente a la curva en ese punto. [1]

**(Esta pregunta continúa en la página siguiente)**

**(Pregunta 1: continuación)**

Considere ahora la ecuación diferencial  $x^2 \frac{dy}{dx} = x(x+y) - y^2$ , donde  $x \neq 0$ ,  $y \neq \pm x$ .

Utilizando la sustitución  $y = vx$ , podemos escribir la ecuación diferencial así:  $x \frac{dv}{dx} = 1 - v^2$ .

(e) Utilizando fracciones simples, muestre que  $\int \frac{1}{1-v^2} dv = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{A(1+v)}{1-v} \right|$ , donde  $A$  es una constante positiva. [5]

(f) A partir de lo anterior, muestre que una solución de la ecuación diferencial original se puede expresar de la forma  $x^2 = \left| \frac{A(x+y)}{x-y} \right|$ , donde  $A$  es una constante positiva. [5]

Considere ahora únicamente el caso en el que  $\frac{A(x+y)}{x-y} > 0$ .

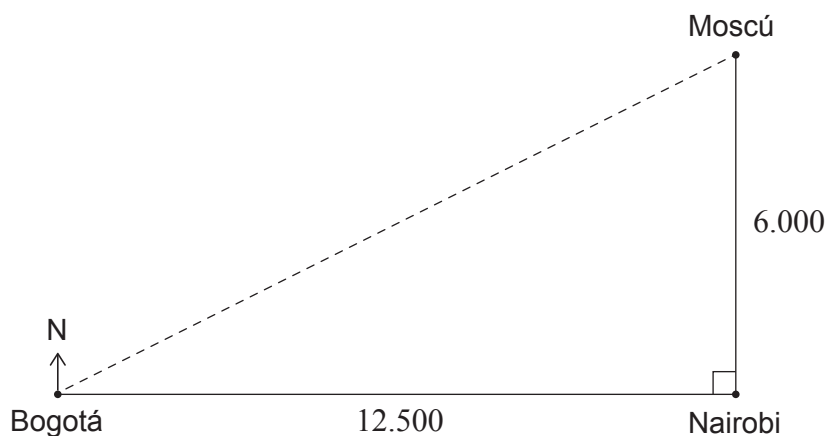
(g) Muestre que una solución de la ecuación diferencial original es  $y = \frac{x(x^2 - A)}{x^2 + A}$ . [4]

2. [Puntuación máxima: 27]

**En la siguiente pregunta se compara la distancia y el rumbo entre ciudades situadas en una superficie plana con la distancia y el rumbo entre ciudades situadas sobre una esfera.**

Considere un modelo en el que las ciudades Bogotá, Moscú y Nairobi se sitúan en una superficie plana. En este modelo, Nairobi está a 6.000 km directamente al sur de Moscú, y Bogotá está a 12.500 km directamente al oeste de Nairobi, como se muestra en la siguiente figura.

**la figura no está dibujada a escala**



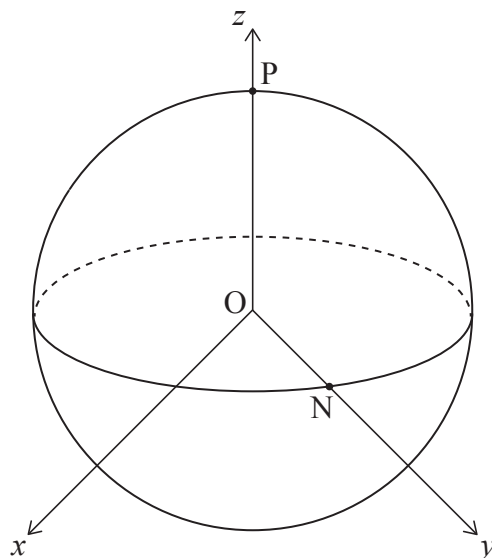
- (a) (i) Halle la distancia que hay entre Bogotá y Moscú. [2]
- (ii) Halle la demora de Moscú desde Bogotá. Dé la respuesta en grados. [3]

**(Esta pregunta continúa en la página siguiente)**

**(Pregunta 2: continuación)**

En realidad, estas tres ciudades están situadas sobre la superficie curva de la Tierra, lo que hará que cambien las distancias y los rumbos hallados en el apartado (a).

Considere ahora un modelo curvo en el que se utiliza un sistema de coordenadas  $(x, y, z)$  cuyo origen  $O$  esté en el centro de la Tierra. Las unidades de este sistema son miles de kilómetros y la Tierra se modeliza mediante una esfera de radio 6.000 km. El polo norte ( $P$ ) se sitúa en el eje  $z$  y Nairobi ( $N$ ) se modeliza como si estuviera en el ecuador y se situara en el eje  $y$ .



$P$  tiene por vector de posición  $\vec{OP} = \mathbf{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$  y  $N$  tiene por vector de posición  $\vec{ON} = \mathbf{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

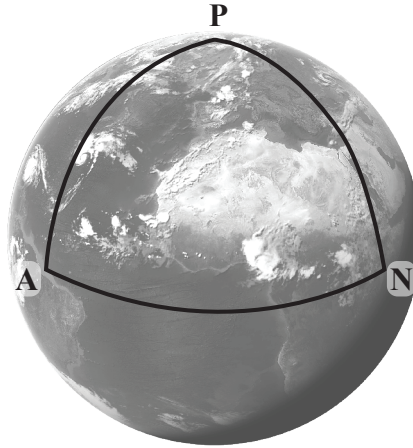
(b) (i) Utilice el producto escalar para hallar el ángulo que forman  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{n}$ . [2]

(ii) Muestre que la distancia que hay entre  $P$  y  $N$  a lo largo del arco que va de  $P$  a  $N$  es igual a  $3000\pi$  km. [2]

**(Esta pregunta continúa en la página siguiente)**

**(Pregunta 2: continuación)**

El punto  $A$ , que también se sitúa en el ecuador, tiene por vector de posición  $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , como se muestra en la siguiente figura.



$P$ ,  $N$  y  $A$ , junto con los arcos que los conectan, forman un triángulo esférico.

El ángulo del vértice  $A$  se define como el ángulo que forman los vectores  $\mathbf{a} \times \mathbf{p}$  y  $\mathbf{a} \times \mathbf{n}$ .

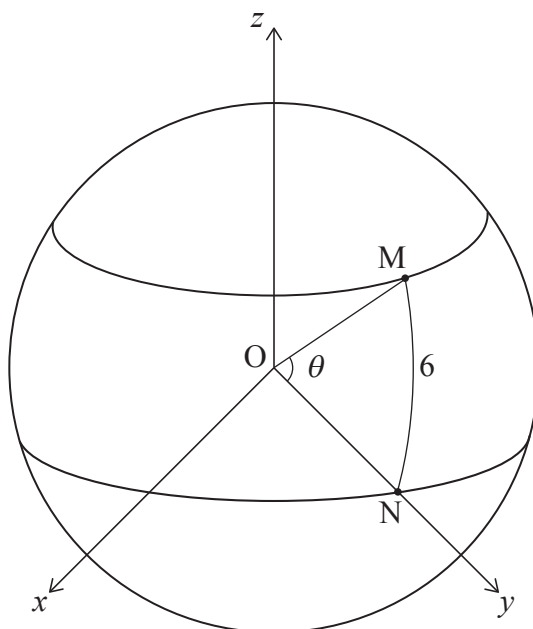
(c) (i) Halle el vector  $\mathbf{a} \times \mathbf{p}$ . [2]

(ii) Muestre que, en este triángulo esférico, el ángulo del vértice  $A$  es igual a  $90^\circ$ . [3]

**(Esta pregunta continúa en la página siguiente)**

**(Pregunta 2: continuación)**

Moscú (M) tiene por vector de posición  $\vec{OM} = \mathbf{m} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \cos \theta \\ 6 \sin \theta \end{pmatrix}$ , como se muestra en la siguiente figura.



La distancia más corta entre dos puntos de la superficie de la esfera se halla recorriendo el arco de una circunferencia trazada sobre la esfera y con centro en O. En este modelo la distancia más corta entre Moscú y Nairobi es igual a 6.000 km.

(d) Muestre que  $\theta = 57,3^\circ$ , redondeando a tres cifras significativas. [2]

Bogotá (B) está al oeste de Nairobi y tiene por vector de posición  $\vec{OB} = \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \sin 120^\circ \\ 6 \cos 120^\circ \\ 0 \end{pmatrix}$ .

(e) Halle la distancia más corta entre Bogotá y Moscú sobre la esfera. [5]

La demora desde B hacia M se define como el ángulo del vértice B en el triángulo esférico

que contiene a B, M y P. Se sabe que  $\mathbf{b} \times \mathbf{p} = \begin{pmatrix} 36 \cos 120^\circ \\ -36 \sin 120^\circ \\ 0 \end{pmatrix}$ .

(f) Utilizando el método del apartado (c), halle la demora desde Bogotá hacia Moscú. [6]



**Advertencia:**

Los contenidos usados en las evaluaciones del IB provienen de fuentes externas auténticas. Las opiniones expresadas en ellos pertenecen a sus autores y/o editores, y no reflejan necesariamente las del IB.

**Referencias:**

- 2(c)** Google Maps/Google Earth. Datos de Data SIO, NOAA, U.S. Navy, NGA, GEBCO Landsat / Copernicus, IBCAO, U.S. Geological Survey, PGC/NASA. Imágenes del 14 de diciembre de 2015. Imagen disponible en: [https://earth.google.com/web/@12.01529518,-18.56070747,-158.39383184a,23597813.93249989d,30.00008083y,359.99981502h,0t,0r/data=CgRCAggBOgMKATBCAggASg0I\\_\\_\\_\\_\\_ARAA](https://earth.google.com/web/@12.01529518,-18.56070747,-158.39383184a,23597813.93249989d,30.00008083y,359.99981502h,0t,0r/data=CgRCAggBOgMKATBCAggASg0I_____ARAA).

**Los demás textos, gráficos e ilustraciones: © Organización del Bachillerato Internacional, 2025**