

© International Baccalaureate Organization 2025

All rights reserved. No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without the prior written permission from the IB. Additionally, the license tied with this product prohibits use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, whether fee-covered or not, is prohibited and is a criminal offense.

More information on how to request written permission in the form of a license can be obtained from <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organisation du Baccalauréat International 2025

Tous droits réservés. Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite préalable de l'IB. De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, moyennant paiement ou non, est interdite et constitue une infraction pénale.

Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour obtenir une autorisation écrite sous la forme d'une licence, rendez-vous à l'adresse <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organización del Bachillerato Internacional, 2025

Todos los derechos reservados. No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin la previa autorización por escrito del IB. Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales—, ya sea incluido en tasas o no, está prohibido y constituye un delito.

En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una autorización por escrito en forma de licencia: <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

Matemáticas: Análisis y Enfoques

Nivel Superior

Prueba 1

15 de mayo de 2025

Zona A tarde | Zona B tarde | Zona C tarde

Número de convocatoria del alumno

2 horas

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Instrucciones para los alumnos

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba no se permite el uso de ninguna calculadora.
- Sección A: conteste todas las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto.
- Sección B: conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Escriba su número de convocatoria en la parte delantera del cuadernillo de respuestas, y adjúntelo a este cuestionario de examen y a su portada utilizando los cordeles provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Matemáticas: Análisis y Enfoques NS** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[110 puntos]**.



No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

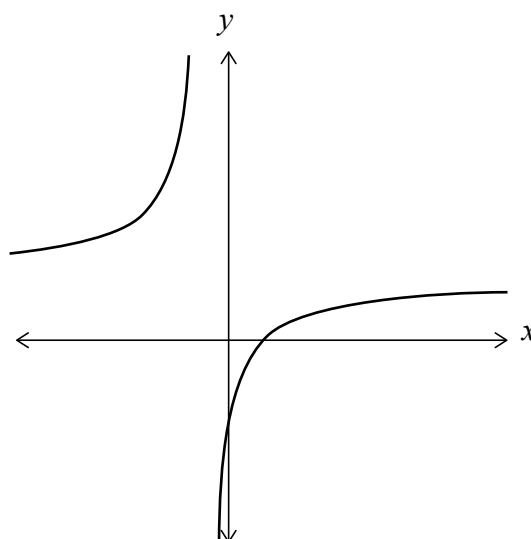
Sección A

Conteste **todas** las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.

1. [Puntuación máxima: 5]

La función f viene dada por $f(x) = \frac{3x-2}{2x+1}$ para $x \in \mathbb{R}$, $x \neq -\frac{1}{2}$.

La siguiente figura muestra una parte del gráfico de $y = f(x)$.



(a) Escriba el valor de $f(0)$. [1]

(b) Escriba la ecuación de la asíntota horizontal. [1]

La función g viene dada por $g(x) = -f(x)$ para $x \geq 0$.

(c) Halle el recorrido de g . [3]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)



(Pregunta 1: continuación)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



16EP03

Véase al dorso

2. [Puntuación máxima: 5]

La recta L_1 se define mediante la ecuación cartesiana $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = z$.

(a) Halle una ecuación vectorial de L_1 .

[2]

Una segunda recta L_2 se define mediante la ecuación vectorial $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, donde $t \in \mathbb{R}$

(b) Halle las coordenadas del punto donde se cortan L_1 y L_2 .

[3]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

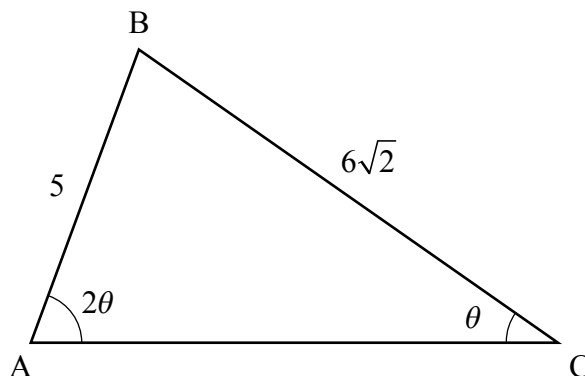
.....



3. [Puntuación máxima: 7]

En la siguiente figura se muestra el triángulo ABC , que no es rectángulo.

la figura no está dibujada a escala



$AB = 5$, $BC = 6\sqrt{2}$, $\hat{ACB} = \theta$ y $\hat{BAC} = 2\theta$, donde $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

(a) Utilizando el teorema del seno, muestre que $\cos \theta = \frac{3\sqrt{2}}{5}$ [3]

(b) A partir de lo anterior, halle $\sin \theta$. [2]

El punto D pertenece a $[AC]$, de modo tal que el área del triángulo BCD es igual a $2\sqrt{14}$.

(c) Halle DC . [2]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



4. [Puntuación máxima: 7]

Sean A y B dos sucesos tales que $P(A \cup B) = \frac{5}{8}$ y $P(A \cap B') = \frac{7}{24}$.

(a) Halle $P(B)$. [3]

(b) Sabiendo que los sucesos A y B son independientes, halle $P(A' | B)$. [4]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



5. [Puntuación máxima: 7]

La ecuación cuadrática $x^2 + kx + 15 - k = 0$ tiene dos raíces reales distintas.

(a) Halle los posibles valores de k . [5]

(b) Halle los posibles valores de k en el caso en el que las dos raíces reales distintas sean ambas positivas o ambas negativas. [2]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



6. [Puntuación máxima: 7]

Considere la función $f(x) = \sqrt{x^2 \ln x + 4 - x^2}$, donde $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$.

- (a) Muestre que la distancia (l) que hay entre el origen y cualquier punto del gráfico de f viene dada por $l = \sqrt{x^2 \ln x + 4}$. [1]
- (b) A partir de lo anterior, halle la coordenada x del punto del gráfico de f más cercano al origen. [6]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



7. [Puntuación máxima: 5]

Se sabe que $x^4 + px^3 - 2x^2 + qx - 3$ es exactamente divisible entre $(x + 1)^2$.

Halle el valor de p y el valor de q , donde $p, q \in \mathbb{R}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

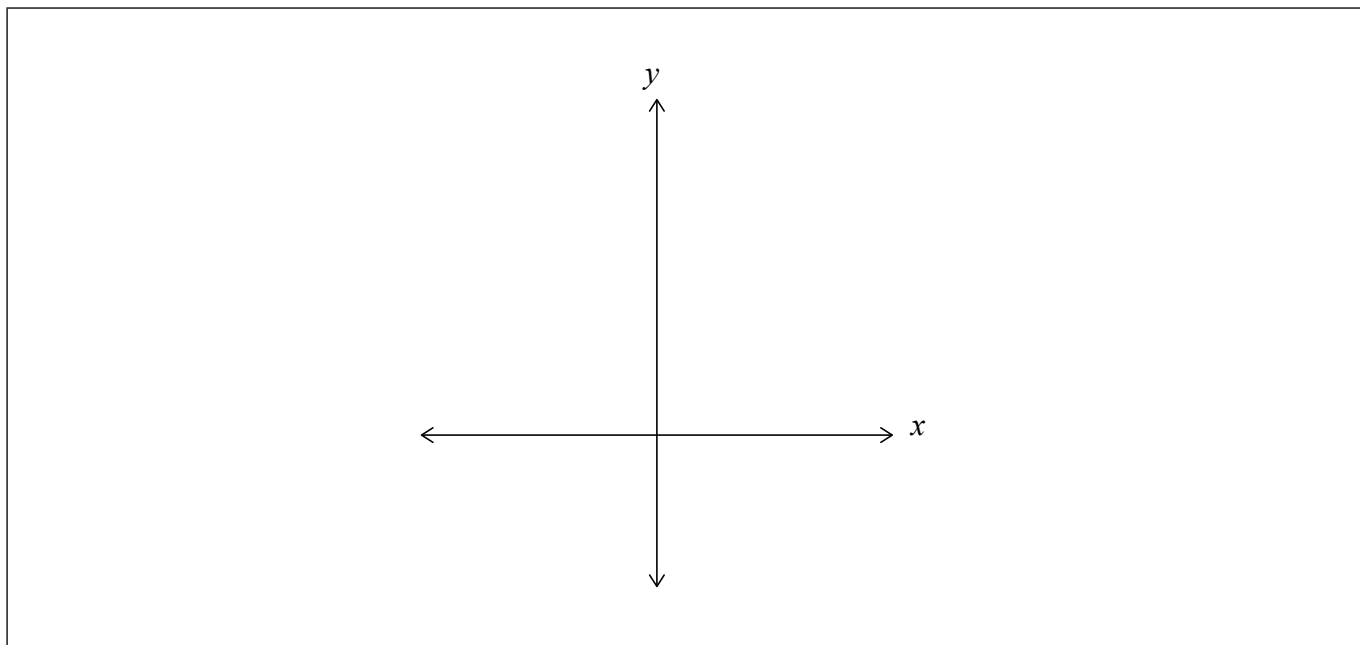
.....



8. [Puntuación máxima: 8]

Considere la función $f(x) = \arccos x$ para $-1 \leq x \leq 1$.

- (a) En los siguientes ejes de coordenadas, dibuje aproximadamente el gráfico de $y = f(x)$. En ese mismo bosquejo (dibujo aproximado), indique claramente la intersección con el eje y y las coordenadas de los extremos. [2]



- (b) Resuelva $\arccos(x) + \arccos(x\sqrt{3}) = \frac{3\pi}{2}$, para $-\frac{1}{\sqrt{3}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$. [6]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



9. [Puntuación máxima: 6]

Pruebe por contradicción que $\frac{1}{x(1-x)} \geq 4$ para $x \in \mathbb{R}$, $0 < x < 1$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



No escriba soluciones en esta página.

Sección B

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta.

10. [Puntuación máxima: 17]

La función f se define así: $f(x) = 4^x$, donde $x \in \mathbb{R}$.

(a) Halle $f^{-1}(8)$. Exprese la respuesta de la forma $\frac{p}{q}$ donde $p, q \in \mathbb{Z}$. [3]

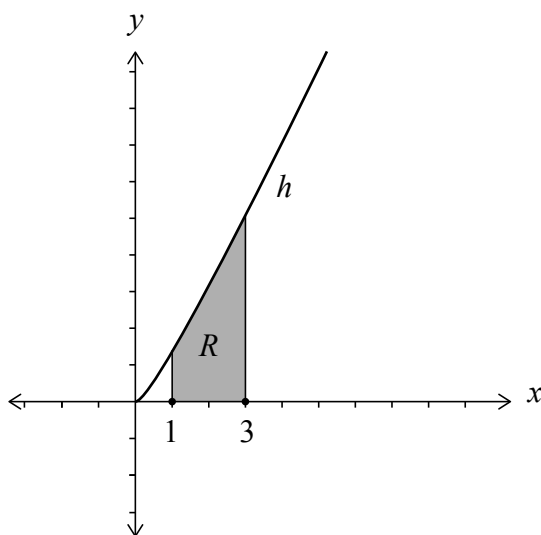
La función g se define así: $g(x) = 1 + \log_2 x$, donde $x \in \mathbb{R}^+$.

(b) (i) Halle una expresión para $g^{-1}(x)$.
(ii) Describa una secuencia de transformaciones que transformen el gráfico de $y = g^{-1}(x)$ en el gráfico de $y = f(x)$. [4]

(c) Muestre que $(f \circ g)(x) = 4x^2$ [3]

La función h se define así: $h(x) = \frac{4x^2}{2x+1}$, $x \neq -\frac{1}{2}$.

La siguiente figura muestra una parte del gráfico de h . Sea R la región delimitada por el gráfico de h y el eje x , entre las rectas $x = 1$ y $x = 3$.



(d) (i) Muestre que $2x - 1 + \frac{1}{2x+1} = \frac{4x^2}{2x+1}$.
(ii) A partir de lo anterior, o de cualquier otro modo, halle el área de R ; dé la respuesta de la forma $p + q \ln r$, donde $p, q, r \in \mathbb{Q}^+$. [7]



No escriba soluciones en esta página.

11. [Puntuación máxima: 17]

- (a) Halle los cuatro primeros términos del desarrollo de la potencia de un binomio para $\sqrt{1+5x}$, en potencias ascendentes de x . [4]

Considere la expresión $(1+px)(1+qx)^{-1}$, donde $p, q \in \mathbb{Q}$.

- (b) Halle el desarrollo de $(1+px)(1+qx)^{-1}$ en potencias ascendentes de x , llegando hasta (e incluyendo) el término en x^2 . [3]

Los desarrollos que ha hallado en los apartados (a) y (b) tienen idénticos los tres primeros términos, para un determinado valor de p y un determinado valor de q .

- (c) Muestre que $q = \frac{5}{4}$. [4]

- (d) La expresión $\frac{1+px}{1+qx}$, siendo $p = \frac{15}{4}$ y $q = \frac{5}{4}$, se puede utilizar como una aproximación de $\sqrt{1+5x}$ donde $|x| < \frac{1}{5}$.

- (i) A partir de lo anterior, hallando un valor adecuado de x , halle la aproximación de $\sqrt{1,2}$ expresándola en la forma $\frac{m}{n}$, where $m, n \in \mathbb{Z}$.

- (ii) Considere ahora la aproximación de $\frac{\sqrt{5}}{2}$. Explique por qué la aproximación de $\frac{\sqrt{5}}{2}$ no es tan exacta como la aproximación de $\sqrt{1,2}$. [6]



No escriba soluciones en esta página.

12. [Puntuación máxima: 19]

(a) Resuelva $z^2 = -1 - \sqrt{3}i$; dé las respuestas en la forma $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$. [4]

Sean z_1 y z_2 las raíces cuadradas de $-1 - \sqrt{3}i$, donde $\operatorname{Re}(z_1) > 0$.

Sean z_3 y z_4 las raíces cuadradas de $-1 + \sqrt{3}i$, donde $\operatorname{Re}(z_3) > 0$.

(b) Expresando las respuestas en la forma $z = a + bi$, donde $a, b \in \mathbb{R}$,

(i) halle z_1 y z_2 .

(ii) deduzca z_3 y z_4 . [4]

Las cuatro raíces z_1, z_2, z_3 y z_4 están representadas en un diagrama de Argand por los puntos A, B, C y D, respectivamente.

(c) (i) Sitúe los puntos A, B, C y D en un diagrama de Argand.

(ii) Halle el área del polígono que forman estos cuatro puntos. [4]

Las cuatro raíces z_1, z_2, z_3 y z_4 satisfacen la ecuación $z^4 + 2z^2 + 4 = 0$.

Las cuatro raíces $\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}, \frac{1}{z_3}$ y $\frac{1}{z_4}$ satisfacen la ecuación $pw^4 + qw^2 + r = 0$ donde $p, q, r \in \mathbb{Z}$.

(d) Halle el valor de p, q y r . [3]

Las cuatro raíces $\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}, \frac{1}{z_3}$ y $\frac{1}{z_4}$ están representadas por los puntos E, F, G y H,

respectivamente, en un diagrama de Argand.

(e) (i) Halle $\frac{1}{z_1}$ y expréselo en la forma $z = a + bi$, donde $a, b \in \mathbb{R}$.

(ii) A partir de lo anterior, deduzca el área del polígono formado por estos cuatro puntos. [4]



No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en
esta página no serán corregidas.



16EP15

No escriba en esta página.

Las respuestas que se escriban en
esta página no serán corregidas.



16EP16